

Sveučilište u Zagrebu
Geodetski fakultet

Kolegij : Analiza prostornih podataka
Predmetni nastavnik : prof. dr. sc. Damir Medak

GEOSTATISTIKA

1. UVOD	3
2. VARIOGRAM	5
2.1. Osnovna načela računanja variograma.....	5
2.2. Modeli variograma	12
3. TEŽINE.....	13
3.1. Težinski faktori dobiveni direktno iz variograma	13
4. KRIGING METODA.....	17
4.1. Uvod u kriging metodu	17
4.2. Kriging točke.....	18
4.3. Kriging bloka.....	25
5. Zaključak.....	30
6. Literatura	33

1. UVOD

Klasične statističke metode bazirane su na pretpostavci kako su pojedini uzorci (npr. vrijednost uzorka kod izbušenih rupa ili cijevi) statistički neovisni jedan o drugome. Taj je uvjet zadovoljen na banalnom primjeru bacanja kockice. Ako je bačena šestica, znači da je šansa da se ona opet okrene u slijedećem bacanju jednaka šansi okretanja svakog drugog broja. Dakle šansa okretanja iznosi $1/6$ jer "šansa nema memoriju". Ovaj tip neovisnosti se rijetko može primijeniti na podatke mineralnih naslaga (ruda). Svaki geolog zna da je šansa za iskop rupe više klase, veća na mjestu prethodnog nalazišta više klase nego na mjestu niže klase. Postoji dakle određena prostorna međuovisnost. Geostatistika je statistika u kojoj je ova prostorna asocijacija uzeta u obzir; tu su varijable poznate kao regionalizirane varijable.

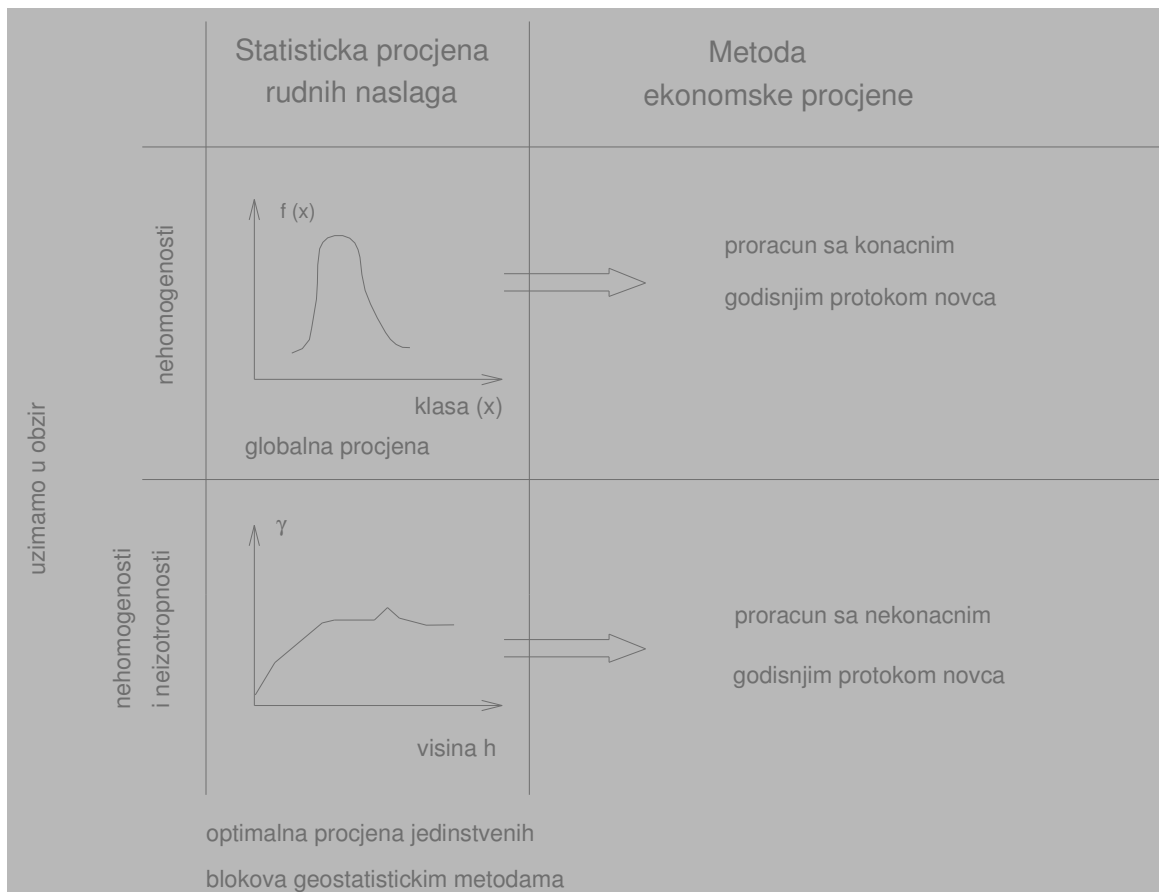
D.J.Krige, znanstvenik iz Južne Afrike, te škola vođena Matheronom u Fontainebleau u Francuskoj, predstavljaju pionire geostatističke discipline. U međuvremenu je otvoreno nekoliko centara za takve studije u različitim zemljama (Kanada, SAD, Velika Britanija, Njemačka). Danas postoje brojne geostatističke publikacije, posebno u Engleskoj i Francuskoj (npr. Clark 1979; Cressie 1991, David 1977 i 1988, Dimitrakopoulos 1994, Isaaks i Srivastava 1989). Njemačke publikacije uključuju knjige Duttera (1985), Akina i Siemesa (1988), kao i publikaciju Klasifikacija rezervi mineralnih naslaga pomoću geostatističkih metoda. Redovne konferencije o aplikacijama računala u mineralnoj industriji su najvažniji simpoziji za geostatističare, a njihove publikacije su odličan izvor povijesnih događaja. Matematička geologija je glavna novina geostatističara. Članci su međutim u opreci sa teoretskim aspektima, a postoji i relativan nedostatak povijesnih slučajeva. Olea (1991) je izdao višejezični geostatistički rječnik.

Geostatistička računanja znaju biti vrlo složena, a mnoga moraju biti izvedena na računalima. Mi ćemo se ovdje baviti samo onim računanjima koja mogu biti izvedena ili ručno ili dijagramom.

Dva su područja gdje geostatistički računi mogu biti važni, čak i u ranim fazama procjenjivanja rudnih naslaga:

Računanje pogrešaka ili nesigurnosti kod rezervnih procjena, te zbog toga i mogućnost klasifikacije sredstava i rezervi (poglavlje 3.);

Određivanje klase za iskopane blokove, osobito ako primjena klase proizlazi iz individualnih blokova ruda ili neobrađenih nalaza u naslagama ruda (poglavlje 4.).



Slika 1. Odnos između metoda statističke i ekonomske procjene

Ostali geostatistički aspekti postaju važniji tek u kasnijoj fazi procjene mineralnih naslaga. Kod proračuna dinamičke profitabilnosti dokazano je kako profitabilnost mineralnih ruda može biti uvećana iskopom blokova najveće moguće klase, tijekom prvih godina operacije kopanja. Prosječna klasa za svaku godinu je potrebna kod računa profitabilnosti, ali i za plan kopanja. Zato klase moraju biti odvojeno računane za svaku godišnju proizvodnju područja. Previsoke i preniske procjene individualnih blokova ruda bi trebale međusobno balansirati zbog globalne procjene cjelokupnih naslaga. No to nije slučaj za sve blokove koji uključuju iskopane rezerve za određenu godinu, jer će to biti blokovi najbolje klase. Proračuni dinamičke profitabilnosti koriste složene formule, a kritičan faktor predstavlja podatak o tome koliki će protok novca biti proizveden u određenoj godini. Ako je npr. klasa za prvu godinu vađenja precijenjena, a numerički izbalansirana procjenom srednje klase za devetu godinu, tada se to očito ne podudara sa ravnotežom profitabilnosti. Trenutna vrijednost protoka novca u prvoj godini se razlikuje od one u devetoj godini.

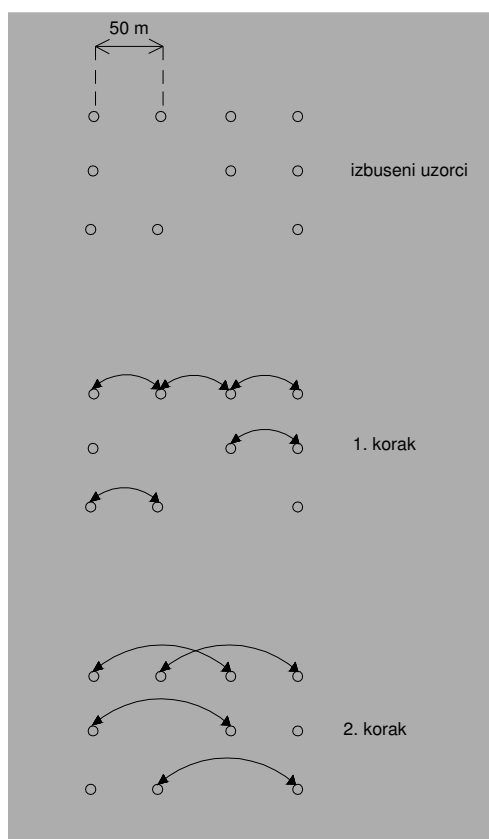
Kod naprednijih studija potrebno je što točnije procijeniti klasu za svaki blok. Tzv. Kriging metoda je najbolja metoda za ovakve procjene. Zato postoji sa jedne strane relacija između dvije dinamičke metode za račun profitabilnosti, osobito računi sa jednakim i varijabilnim godišnjim tokovima novca; sa druge strane statističke i geostatističke metode računanja sa podacima mineralnih naslaga. Odnos je vidljiv na slici 1.

2. VARIOGRAM

2.1. Osnovna načela računanja variograma

Uvod nam je pokazao kako geostatističari promatraju prostornu ovisnost uzorkovanih ili analitičkih vrijednosti. Variogram je osnovno sredstvo vrednovanja, kvantificiranja te prostorne ovisnosti. U praksi variogram predstavlja prosjek kvadrata razlika dviju vrijednosti računatih kao funkcije udaljenosti tih vrijednosti (slika 2). Osnova je svim geostatističkim računanjima.

Razmotrimo primjer na slici 2. U prvom koraku računate su razlike za parove udaljene 50 m, u drugom su razmaknute za 100 m itd. Vrijednosti za variogram su računane po slijedećoj formuli:



Slika 2. Princip računanja eksperimentalnog variograma

$$\gamma_{(h)} = \frac{1}{2n_{(h)}} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+h})^2 \quad (1)$$

x_i = vrijednosni podatak (klasa rude)

x_{i+h} = udaljenost h od x

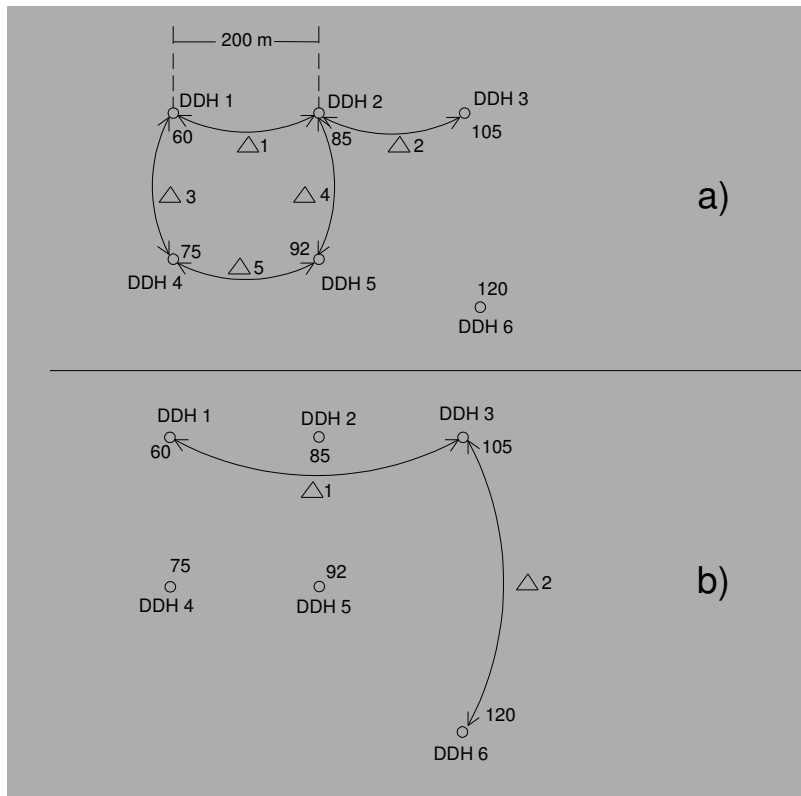
$n_{(h)}$ = konačan broj vrijednosnih parova uključenih u usporedbu

Variogrami su idealni za identifikaciju neizotropnih oblika u mineralnim naslagama, npr. strukture, ali i svaka druga prostorna ovisnost. U prvoj fazi γ -vrijednosti se računaju samo u jednom smjeru, horizontalnom (slika 1), a u drugoj fazi se računaju samo za okomit smjer. Distribucija podataka je tako relativno gusta, što obično nije slučaj u ranijim fazama procjene. Općenito, potrebno je više od 30 izbušenih rupa da bi mogli izračunati značajne variograme u nekoliko smjerova. Ako distribucija podataka nije dovoljno gusta, što je tipično za ranije faze, tada se koristi srednji ili potpuni variogram, jer je neovisan o orijentaciji. On je osnova za sva slijedeća računanja.

Variogrami za granice naslaga ili tablične naslage ruda, se obično ne računaju iz vrijednosti klase x_i , nego iz produkta gustoće klase. Npr. ako imamo 2 sjecišta rupa sa istom prosječnom klasom, npr. 0.8 % MoS_2 , tada je razlika klasa nula, čak iako su sjecišta gustoće samo 5 m u jednoj rupi a 25 m u drugoj. Koristeći produkt klasne gustoće, vrijednosti razlika će sada biti $0.8 \times 25 - 0.8 \times 5 = 16$ (% m). Tamo gdje gustoća ostaje približno konstantna, kao npr. na obalama otvorenih rudnika, variogram može biti izračunat samo za klase, što je poznato kao klasni variogram.

Primjer 1: Slika 3 prikazuje 6 izbušenih rupa i njihove vrijednosti klasne gustoće iz naslaga. Jedinica za takvu gustoću je % K_2O · m. Izračunat ćemo srednji variogram.

Prvi korak: Dobivene su sve moguće razlike za najmanje intervale, odnosno 200 m. 5 je takvih razlika (slika 3a). γ -vrijednosti dobivene su iz jednadžbe 1.



Slika 3. Primjer računanja γ -vrijednosti iz šest izbušenih rupa naslaga

Tablica 1. Primjer računanja koraka variograma

Razlika Δ	$x_i - x_{i+h}$	$(x_i - x_{i+h})^2$
$\Delta 1$	$60 - 85 = -25$	625
$\Delta 2$	$85 - 105 = -20$	400
$\Delta 3$	$60 - 75 = -15$	225
$\Delta 4$	$85 - 92 = -7$	49
$\Delta 5$	$75 - 92 = -17$	289
		Suma = 1588

$$\gamma_{(200)} = \frac{1}{2 \cdot 5} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+h})^2$$

Prema tablici 1, suma kvadrata razlika iznosi 1588. Dakle:

$$\gamma_{(200)} = \frac{1}{2 \cdot 5} \cdot 1588 = 158.8$$

Drugi korak: Ovdje možemo izračunati dijagonalan razmak $h = 283$ m. No da bi pojednostavili račun, uzeli smo da nam je $h = 400$ m. Postoje dvije razlike:

$$\gamma_{(400)} = \frac{1}{2 \cdot 2} \left[\left(60 - 105 \right)^2 + \left(105 - 120 \right)^2 \right]$$

$$\gamma_{(400)} = \frac{1}{4} (2025 + 225)$$

$$\gamma_{(400)} = \frac{2250}{4} = 562,5$$

U praksi, samo dvije vrijednosti za razlike nisu definitivne, i to je izračunato samo kao primjer. Trebali bi imati barem 5 vrijednosti razlika u svakom koraku da bi konstruirali kompletan variogram.

Tada su γ -vrijednosti plotane kao funkcije razmaka h , a rezultat je eksperimentalni variogram. Ručno računanje variograma često postaje zbunjujuće za velike setove podataka.

Razlikujemo nekoliko vrsta variograma. Mnoga nalazišta koriste tzv. prelazni tip variograma (slika 4). Ako se funkcija $\gamma(h)$ povećava (unutar ranga a) tada postoji prostorna ovisnost klasa i tzv. kovarijanca nije jednaka nuli, što je vidljivo sa slike. U horizontalnom smjeru iznad ranga a , uzorci vrijednosti su statistički neovisni, kovarijanca je jednaka nuli, a γ -vrijednost je jednaka varijanci.

Stoga je variogram idealan za razjašnjavanje problema da li su uzorci vrijednosti međusobno statistički neovisni, ili su prostorno ovisni.

Teoretski odnosi za γ -vrijednosti, kovarijanca i varijanca σ^2 , trebaju biti ukratko opisani.

Varijanca sume ili razlike varijabli, može biti generirana na isti način kao i kvadratna jednadžba. Za varijancu razlike između x_i i x_{i+h} , $\sigma^2_{x_i - (x_i + h)}$, dobivena je iz:

$$\sigma^2_{x_i - (x_i + h)} = \sigma^2_{x_i} + \sigma^2_{x_i + h} - 2\sigma_{x_i} \cdot \sigma_{x_i + h} \quad (2)$$

Kovarijancu između x_i i x_{i+h} smo označili sa $\sigma_{x_i} \cdot \sigma_{x_i + h}$:

$Cov [x_i , x_{i+h}]$ ili $\sigma_{i, i+h}$

Budući da smo x_i i x_{i+h} dobili iz iste skupine, oni moraju imati istu varijancu:

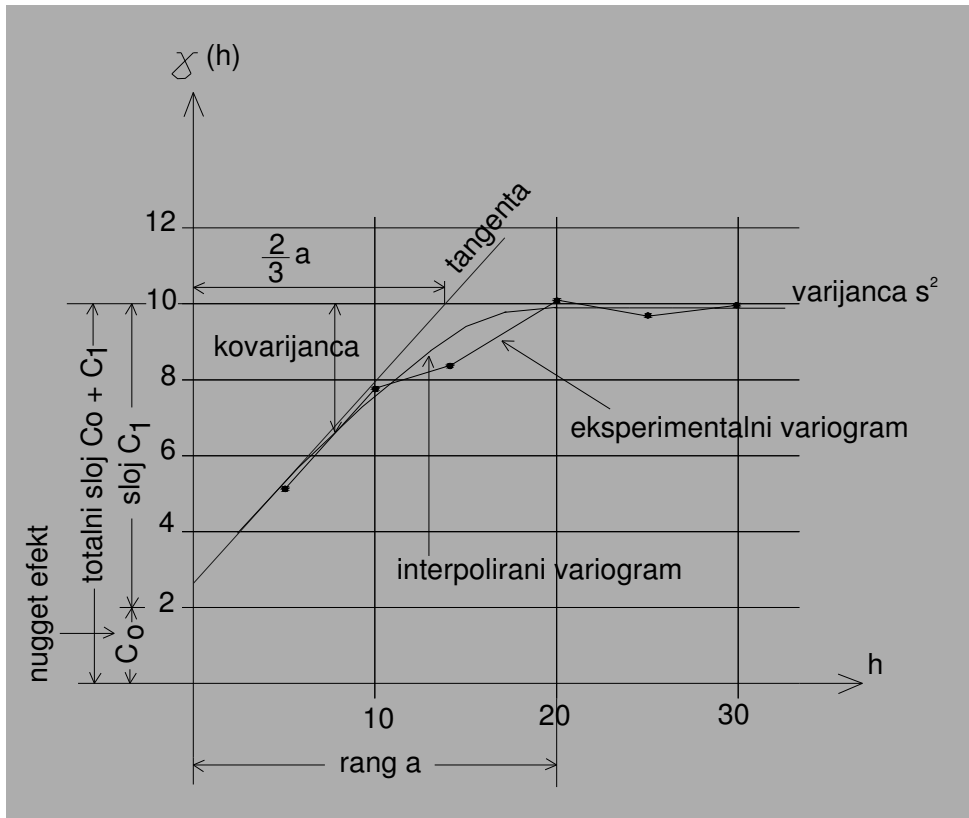
$$\sigma^2_{x_i - (x_i + h)} = 2\sigma^2_{x_i} - 2Cov[x_i, x_{i+h}] \quad (3)$$

ili

$$1/2 \sigma^2_{x_i - (x_i + h)} = \sigma^2_{x_i} - Cov [x_i , x_{i+h}] .$$

To je isto kao $\gamma(h)$, pa pišemo:

$$1/2 \sigma^2_{x_i - (x_i + h)} = \gamma(h) = \sigma^2_{x_i} - Cov[x_i, x_{i+h}] . \quad (4)$$



Slika 4. Variogram prelaznog tipa

Kovarijanca je jednaka nuli ako su x_i i $x_{(i+h)}$ neovisne varijable, ili ako ne postoji prostorna ovisnost. To proizlazi iz dodatnog pravila za varijance neovisnih slučajnih varijabli. Ako je udaljenost h veća od ranga a , tada su vrijednosti statistički neovisne. Zato za $h \geq a$ vrijedi:

$$\gamma(h) = \sigma_{x_i}^2 \quad (5)$$

tako da horizontalna vrijednost, prema kojoj se približava normalan, prelazni tip variograma, ima istu veličinu kao i varijanca. Crtanjem horizontalne linije u intervalu s^2 za γ -vrijednost na variogramu, aproksimacija se može iskoristiti za interpolaciju horizontalne komponente modela variograma iz eksperimentalnog variograma (slika 4). Slijedeći uvjet mora biti zadovoljen: većina uzoraka korištenih za računanje varijance nalazi se van ranga a . Prema Barnesu (1991), mjerenje od oka za takvu aproksimaciju je takvo da podatak mora biti jednoliko distribuiran po području dimenzija većih od trostrukog ranga variograma.

Ako je variogram nastao korištenjem varijance, tada se kovarijanca može dobiti iz variograma po formuli 4. To će se odnositi na kriging računanja.

Matematički model, tzv. model sfernog variograma, može biti interpoliran iz eksperimentalnog tipa variograma po jednadžbi:

$$\gamma_{(h)} = C_1 \left(\frac{3}{2} \frac{h}{a} - \frac{1}{2} \frac{h^3}{a^3} \right) + C_0 \quad (6)$$

$$\gamma_{(h)} = C_1 + C_0$$

Geostatističke knjige sadrže tablice za takve funkcije (6). Npr. u Akinu i Siemesu (1988), vrijednosti za $C_0=0$ i $C_1=1$ su izložene za interval od $h/a=0$ do $h/a=1$.

Te se tablice ovdje ne koriste. Umjesto njih, sferni variogrami su interpolirani od oka. Variogram je jaka statistička tehnika, te male devijacije ne utječu znatno na krajnje rezultate (Krige 1978). Približna interpolacija (od oka) je dobra za prve procjene. Geostatistički dijagrami i tablice u slijedećim poglavljima, su bazirani na sfernom modelu.

Jedna karakteristika sfernog modela već je spomenuta (njegova horizontalna komponenta ima istu vrijednost kao varijanca uzoraka s^2). Druga karakteristika funkcije (6) može se koristiti za ručnu interpolaciju – tangenta zakrivljene komponente variograma presjeca veličinu horizontalne komponente u omjeru $2/3$ a.

Prelazni tip variograma (sferni tip) može biti opisan kvantitativno sa 3 parametra (slika 4):

- rangom a
- nugget efektom C_0

→ nagibom C_1 ; C_1 je u geostatističkoj literaturi poznat i kao nagib. Oznaka C se ponekad koristi umjesto C_1 .

Suma nugget efekta i početne vrijednosti ($C_1 + C_0$) poznata je kao vrijednost totalnog nagiba. Jednaka je varijanci σ^2 (jednadžba 5, slika 4).

Svaki sustav u svemiru, pa tako i mineralne naslage, posjeduje određen tipični variogram. Odgovarajuće γ -funkcije nisu poznate, ali mogu biti procijenjene ili aproksimirane (kao u prošlom primjeru) korištenjem eksperimentalnog variograma u odnosu na dostupan podatak. Ova je aproksimacija slična procjenjivanju distribucije. Izvedenice iz a, C_0 i C_1 su stoga slične procjeni sredine μ i varijance skupa σ^2 iz sredine x i varijance s^2 iz veličine uzorka.

Nugget efekt predstavlja promjenu na nuli, ili praktično razmak na nuli. Npr. odabran je jedan uzorak, te zatim ostali na rastojanju od $\Delta x \neq 0$ ili na razmaku blizu nule (da je $\Delta x = 0$ razlika bi dakako morala biti nula). C_0 je sredina kvadrata razlika. Te su razlike ekstremne ako se nugget javlja kod mineralizacije, i otuda ime C_0 . Najbolja procjena za nugget efekt C_0 od velike je važnosti za utvrđivanje parametara variograma. potrebna je velika pažnja, a u obzir se moraju uzeti geološke informacije.

3 parametra dakle karakteriziraju svaki tip mineralnih naslaga (rang a, nugget efekt C_0 i nagib C_1). Nepravilne naslage, kao npr. zlato, imaju velik nugget efekt i / ili malen rang a. Relativno uniformne naslage poput taložnih naslaga olova i cinka, imaju malen nugget efekt (nekad je čak jednak nuli) i veliki rang.

Apsolutne γ -vrijednosti se računaju po formuli (1), a relativne se mogu također izračunati dijeljenjem svake γ -vrijednosti sa kvadratom sredine x :

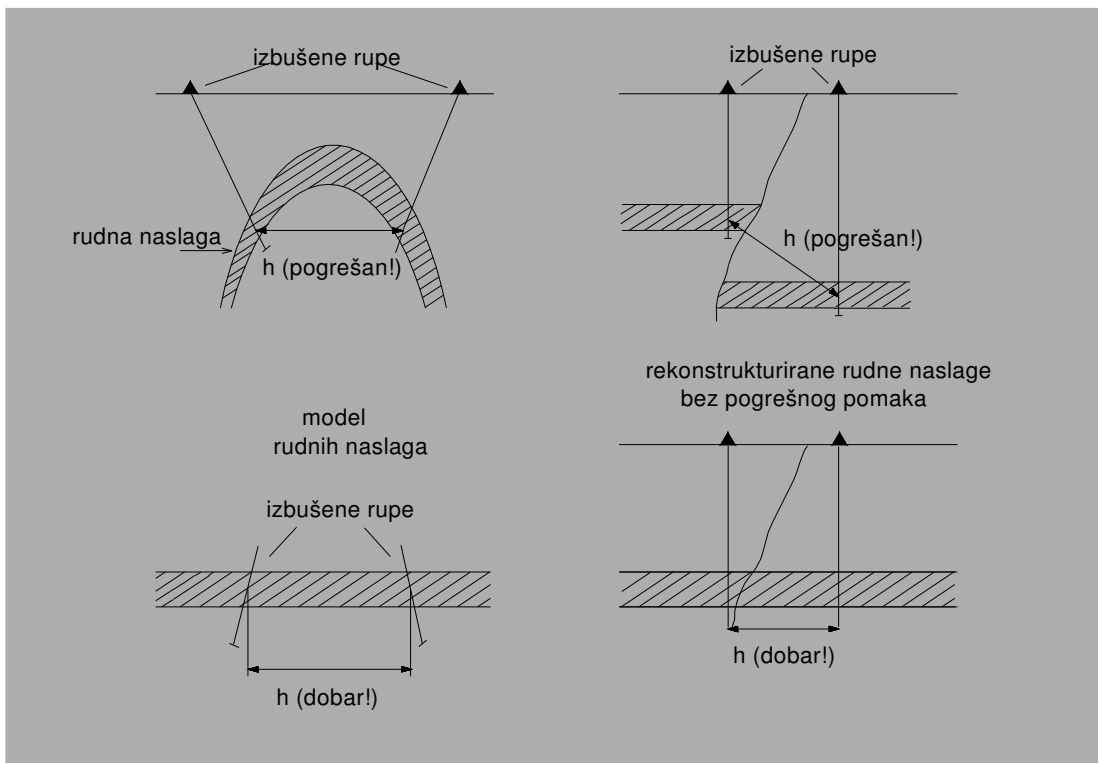
$$\gamma_{re} = \frac{\gamma_{abs(h)}}{x^2} \quad (7)$$

Slijedeća računanja za procjenu pogreške su bazirana na relativnom variogramu prema formuli (7), tako da je određena relativno prema srednjoj vrijednosti.

Variogrami različitih smjerova, orijentacija, mogu također otkriti prisutnost neizotropnih oblika u mineralnim naslagama, a u nekim se okolnostima mogu primijeniti u računanje. Neizotropni oblici mogu biti odraz ranga α i nagiba C_1 , koji ovise o orijentaciji. Nugget efekt je općenito izotropna veličina.

Osim sfernog modela postoje i drugi modeli variograma (objašnjeni u 2.2.). Sferni model najbolje odgovara eksperimentalnim variogramima.

Konačno, spomenut ćemo stacionaran uvjet jer on mora biti zadovoljen kod same tvorbe variograma. Razlika između x_i i x_{i+h} (ili u slučaju neizotropnosti vektor između 2 točke) mora biti neovisna o lokaciji. Akin i Siemes (1988) detaljnije raspravljaju o nepomičnosti, stacionarnosti. U praksi, uvjet upućuje na to da se geološki nehomogene zone, poput bogatijih i siromašnijih mineralnih zona, ne bi trebale tretirati kao cjelina. Umjesto toga, mineralne naslage treba podijeliti na geološki homogene zone, koje ćemo tek tada promatrati kao odvojene geostatističke jedinice sa različitim variogramima.



Slika 5. Pravilno i nepravilno određivanje nožice h kod računanja variograma

Za tvorbu eksperimentalnog variograma geologiju moramo uvijek uzeti u obzir. Npr. h je udaljenost između 2 točke za vrijeme mineralizacije. Tektonske deformacije, poput brazdanja i rasjedanja, mogu promijeniti tu udaljenost. Zato je netočno poistovjećivati presjeke sa x , y i z koordinatama u računalnom programu i nakon toga "slijepo" računati udaljenost između presjeka za duljinu h . Potrebno je konstruirati model iz naboranih naslaga zbog točnog određivanja duljine h , a naslage nastale tijekom rasjedanja moraju biti korigirane za bitan pomak (slika 5).

2.2. Modeli variograma

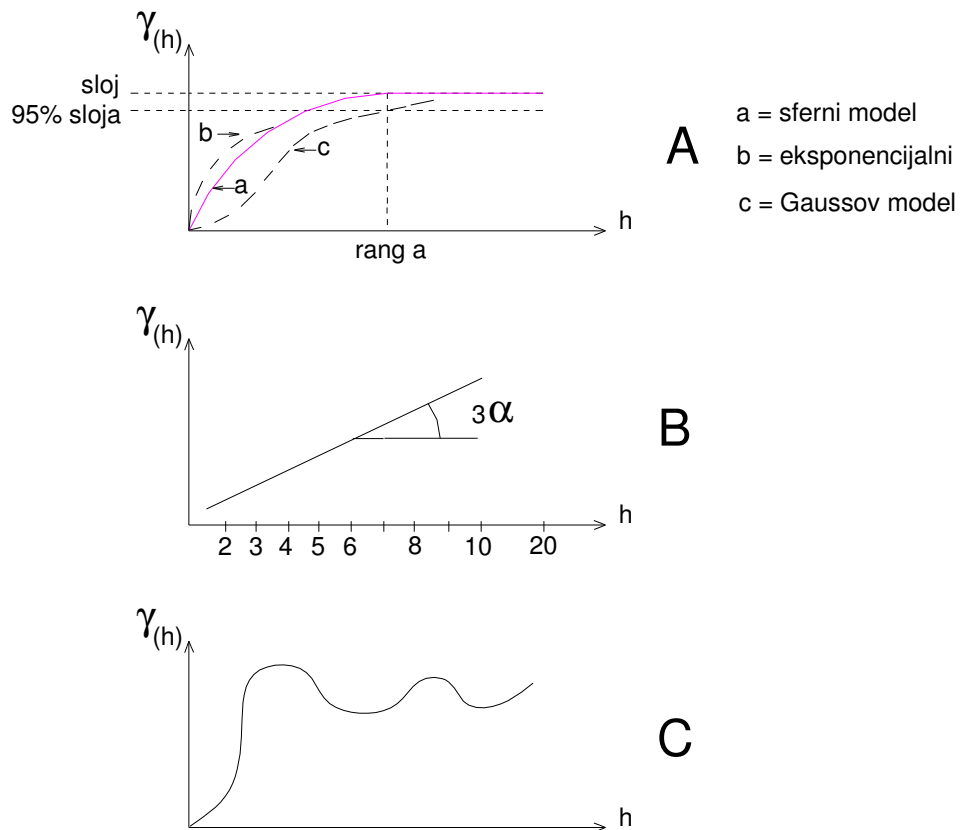
Različiti modeli opisani su u literaturi (npr. David 1977; Isaaks i Srivastava 1989). Neke ćemo detaljno objasniti. Sferni je model već opisan za prelazni tip variograma. To je variogram sa konačnim nagibom ($C_0 + C_1$), koji je dosegnut na

krajnjoj udaljenosti ranga a , ili nagiba do kojeg dođemo asimptotskim približavanjem. U tom slučaju rang je dan kao udaljenost na kojoj je model variograma jednak 95% od vrijednosti nagiba (slika 6 A).

Eksponecijalni model računamo po formuli:

$$\gamma_{(h)} = C_1 \left(1 - e^{-\frac{3h}{a}} \right) \quad (8)$$

Dok u slučaju sfernog modela tangenta na početku variograma presjeca nagib na $2/3$ ranga, kod ekspancijalnog modela tangenta sječe nagib na oko $1/6$ ranga a (slika 6 B).



Slika 6. Modeli variograma

Gaussov model računamo po formuli:

$$\gamma_{(h)} = C_1 \left(1 - e^{-\frac{3h^2}{a^2}} \right) \quad (9)$$

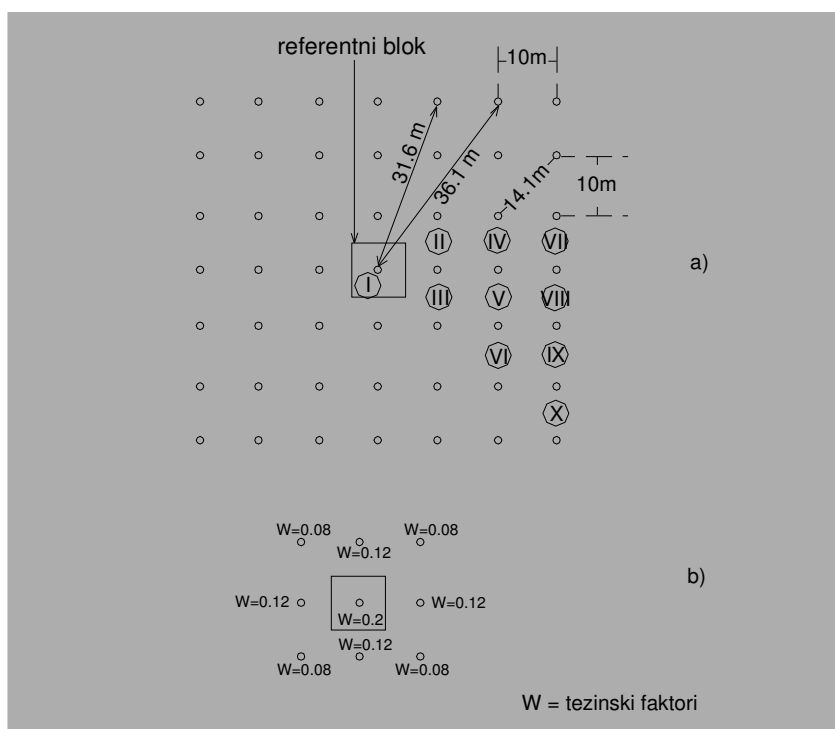
Ovaj model ima parabolično ponašanje na početku. To je jedini model, ovdje spomenut, čiji oblik ima točku infleksije (slika 6 C).

3. TEŽINE

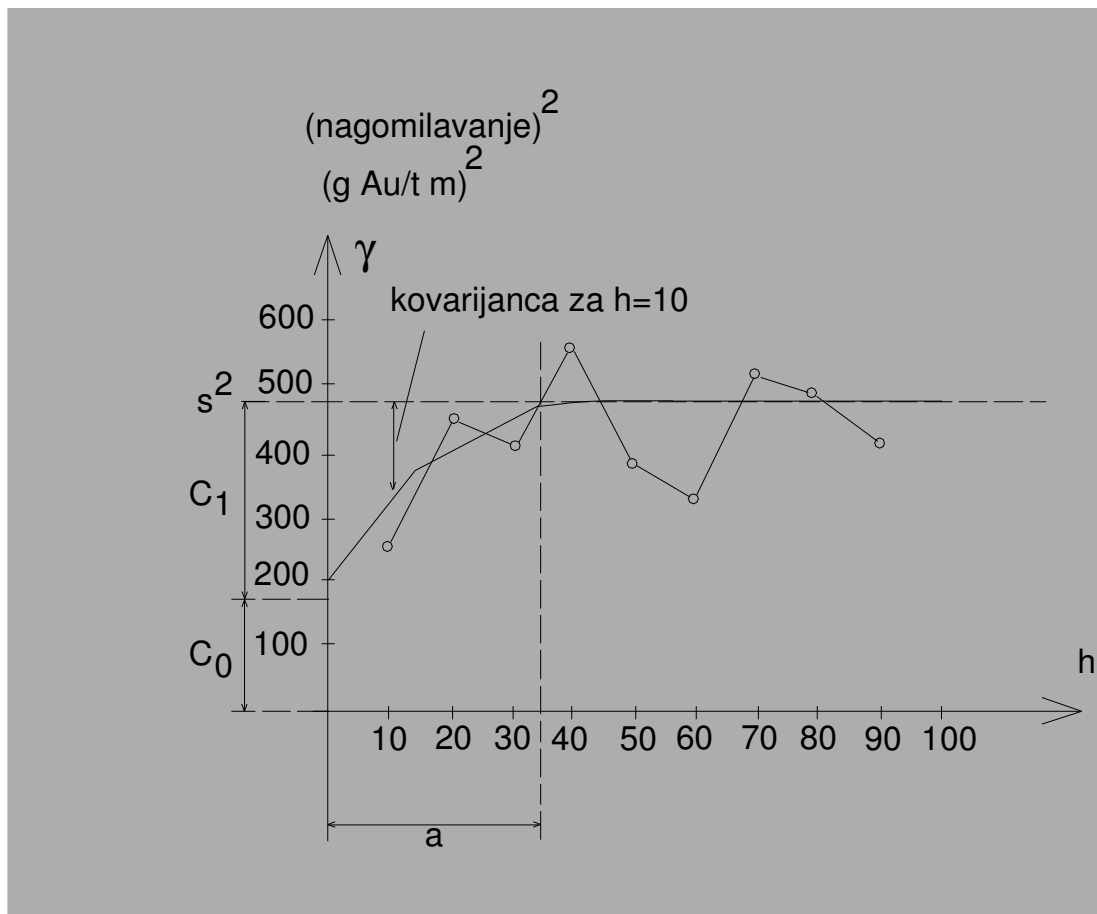
3.1. Težinski faktori dobiveni direktno iz variograma

Upotreba kovarijanci kao težinskih faktora jedan je od uvjeta za prostornu ovisnost izraženu variogramom. Kovarijance možemo dobiti iz variograma (slika 4) Slijedeći će primjer ponovno objasniti metodu:

Primjer 2: Naslaga zlata je podjednako izbušena u 10-metarski grid (slika 7a)



Slika 7. Grid izbušenih rupa naslaga zlata



Slika 8. Variogram naslaga zlata za prethodnu sliku

Klase blokova moraju se računati na slijedeći način: svaka izbušena rupa smještena je u centar bloka. Referentna točka P smještena je odmah do centralne izbušene rupe, od nje je udaljena za Δx . Ta razlika je tako malena, da u praktičnim okvirima, simetrija sa ostalim izbušenim rupama ostaje ista. Klasa računata pomoću težina (odnosi se na točku P) je tada dodijeljena cijelom bloku.

Pripremljen je eksperimentalni variogram za vrijednosti klasne gustoće ($\text{gAu/t} \times \text{m}$), te je i interpoliran (slika 8).

Prvi korak: Analiza variograma sa slike 8 pokazuje kako je rang a smješten na $\approx 36\text{m}$. Zbog samog primjera, sve će se točke uzeti u obzir.

Drugi korak: Analizirana je simetrija izbušenog grida oko referentne točke P. Možemo definirati 10 razreda izbušenih mjesta (na slici 7a označeni od I do X), na osnovu njihove udaljenosti od točke P. Odgovarajuće udaljenosti su također vidljive na slici 7a.

Treći korak: Određen je broj točaka u svakom razredu. U tablici 2 vidljiva je udaljenost odgovarajućih točaka od referentne točke P. Kovarijanca svakog razreda je tada dobivena iz variograma (slika 8). Vrijednost za prvu točku, točku I, u centru referentnog bloka, jednaka je vrijednosti nagiba C_1 .

Kovarijanca su jednake nuli za točke u razredima IX i X, smještene su izvan ranga a.

Četvrti korak: Kovarijanca u svakom razredu pomnožene su sa odgovarajućim brojem točaka u razredu, rezultati su vidljivi u 5-tom stupcu tablice 2, te tada zbrojene zajedno. U 6-tom stupcu računati su normalizirani težinski faktori, i

to dijeljenjem inverznih faktora iz 5-tog stupca sa sumom tih faktora (2126) i brojem točaka svakog razreda. Analiza tih normaliziranih težinskih faktora pokazuje kako faktori za točke drugog i trećeg reda (relativno prema P, kategorije IV do VIII) imaju samo malu težinsku vrijednost. 73% ukupnog težinskog faktora dobiveno je iz 9 točaka razreda I, II i III, a ostalih 27% iz 20 točaka IV – VIII razreda.

Bliži redovi izbušenih mjesta stoga izgledaju kao da sakrivaju redove onih mjesta koji su udaljeniji. To je poznato kao efekt zaklanjanja.

Peti korak: Što je više točaka uključeno u račun težina, to je očito ručno računanje složenije.

S obzirom na efekt zaklanjanja, kao i na praktična razmatranja, razmatrat ćemo samo točke I, II i III razreda. Ti razredi uključuju samo one izbušene rupe koje su u trenutnoj blizini sa referentnom točkom P. Procedura računanja iz 4-tog koraka za normalizaciju težinskih faktora mora zato biti ponovljena, a rezultati su vidljivi u 7-om i 8-om stupcu u tablici 2. Konačni su rezultati u 8-om stupcu, a vide se i na slici 7b.

Šesti korak: Na slici 9 prikazane su nagomilane nakupljene vrijednosti. Vrijednost je sad računata za referentnu točku P, koristeći težinske faktore dobivene u 5-tom koraku.

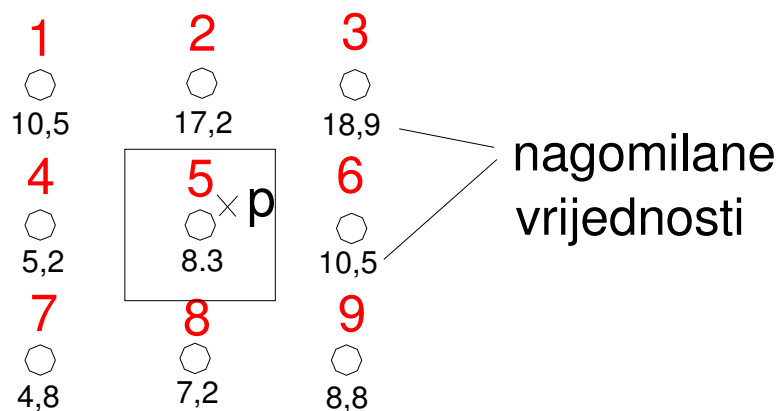
Uobičajena težinska jednadžba:

$$x' = \frac{\sum_{i=1}^n x_i a_i}{\sum_{i=1}^n a_i} \quad (10)$$

a_i = težinski faktor

Nakon uzimanja simetrije u obzir (sve točke istog razreda uključene su u jednu klasificiranu funkciju), jednadžba glasi:

$$x_p = \frac{(\text{razred I}) \cdot 0,2 + (\sum \text{razred II}) \cdot 0,12 + (\sum \text{razred III}) \cdot 0,08}{1} \quad (11)$$



Slika 9. Nagomilane (akumulacijske) vrijednosti za izbušene rupe unutar bloka, te za susjedne rupe izvan bloka naslaga zlata sa slike 7.

1. stupac Kategorija točke	2. stupac Broj točaka n	3. stupac Udaljenost od P h	4. stupac Kovarijanca Cov h	5. stupac Cov h * n	6. stupac Normalizirani težinski faktori W _i	7. stupac Cov i * n	8. stupac Normalizirani težinski faktori W _i
I	1	x = 0	C ₁ = 310	310	0,15	310	0,2
II	4	10,0m	185	740	0,09	740	0,12
III	4	14,1m	125	500	0,06	500	0,08
IV	4	20,0m	65	260	0,03	1550	
V	4	22,4m	45	180	0,02		
VI	4	28,1m	17	68	0,01		
VII	4	30,0m	10	40	0		
VIII	4	31,6m	7	28	0		
IX	4	36,1m	0	0	0		
X	4	42,3m	0	0	0		
				2126			

Tablica 2. Računanje težinskih faktora direktno iz variograma

Budući da je osmi stupac tablice 2 normaliziran, suma svih težinskih faktora, pa tako i nazivnik, jednaka je 1.

To je težinska klasa za referentnu točku P, koja je sada dodijeljena cijelom bloku. Ako tu vrijednost, od 9.9 g Au/t, usporedimo sa klasom od 8.3 g Au/t za prvu izbušenu rupu (I), tada možemo vidjeti da je utjecaj izbušenih rupa više klase (rupe 1, 2, 3, 6, 9) povećao cjelokupnu vrijednost za blok.

Mana ove metode je očita: iako je to metoda točkaste procjene, rezultat je prenesen na blok i kompletno je neovisan o veličini bloka.

4. KRIGING METODA

4.1. Uvod u kriging metodu

Kriging metoda je dobila ime po južno-afričkom geostatističaru D.J.Krigeu. To je tehnika određivanja najbolje linearne procjene sa minimalnom varijancom. Može se primijeniti na točku, ali i na blok. Blok je simuliran brojnim točkama koje se tada integriraju.

To je prilično teška i računalno zahtjevna metoda. Kriging metoda je prikladnija u zadnjim fazama razvoja, osobito za izračunavanje individualnih blokova, što je potrebno za detaljna rudna planiranja i analize protoka novca. Međutim, pouzdana identifikacija rudnih blokova strašno je važna tijekom ranijih faza procjene naslaga izoliranih rudnih blokova i/ili neobrađenih. Zato su ovdje objašnjene jednostavne kriging tehnike, jer omogućuju najbolje težinske faktore. Primjenu kriging metode opisat ćemo u 2 faze.

Prva faza: Kriging točke

Referentna točka P izabrana je u bloku, klasa joj je procjenjena kriging tehnikom. Ako generaliziramo vrijednost cijelog bloka, rezultat je slab (vidljivo u 2.) jer smo pridružili klasu točke cijelom bloku bez obzira na veličinu bloku.

Druga faza: Kriging bloka

Veličinu bloka uzimamo u obzir. Nećemo se baviti teorijom ovdje, nego izračunavanjem težinskih faktora (kriging faktora) označenih sa λ_i pomoću primjera. Dvije su vrste kriginga:

- a) Kriging bez sredine x^0 (kriging sa nepoznatom sredinom)
- b) Kriging sa sredinom x^0 naslaga ili zona unutar naslaga (kriging sa poznatom sredinom)

U a) primjeru pretpostavljamo da je suma kriging faktora jednaka 1, ili :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

(12)

To nije slučaj u b) primjeru. Razlika sume λ_i i 1 označena je težinskim faktorom sredine x^0 (4.2.3.)

Općenito, ako klasa naslaga ne pokazuje očite trendove koristimo kriging sa sredinom. Metoda je jednostavnija za ručno računanje jer se javlja jedna nepoznanica manje (Lagrangeov multiplikator μ). Ako se zna trend klase, ili su jasno definirane visoke i niske klasne zone, tada metoda sa sredinom nije prikladna.

4.2. Kriging točke

4.2.1. Jednadžbe kriging sustava

Kriging koristi sustav linearnih jednadžbi, matrično zapisan:

1. Kriging matrica K sadrži varijance σ_{ii} i kovarijance σ_{ij} za sve točke x_i ($i = 1, 2 \dots n$) oko referentne točke P ; σ_{ij} je kovarijanca između vrijednosti x_i i x_j , a σ_{ii} je kovarijanca za jednu vrijednost ($h = 0$), pa je zato identična varijanci.

$$K = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(13)

To je kriging matrica za slučaj a) kriging bez sredine . U b) slučaju, gdje je sredina poznata, nedostaju u matrici posljednji red i stupac.

Budući da $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ matrica je simetrična. Ako gledamo da li se točka 1 vidi sa točke 2, ili obratno, kovarijanca između točkaka 1 i 2 mora biti jednaka. Razmak je dakle isti, i upravo je to dimenzija koja određuje kovarijancu.

2. Težinski faktori λ_i opisuju vektor λ . Lagrangeov multiplikator se ne javlja u b) slučaju.

$$\vec{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu \end{bmatrix}$$

(14)

3. Treća dimenzija je vektor D (jednadžba 15). Ovaj vektor sadrži kovarijance referentne točke P prema svim točkama koje uzimamo u obzir:

$$\vec{D} = \begin{bmatrix} \sigma_{P,1} \\ \sigma_{P,2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma_{P,n} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

To je također vektor za a) slučaj. Zadnja vrijednost 1 se ne pojavljuje u b) slučaju (kriging sa poznatom sredinom). Tada je istinit slijedeći odnos između kriging matrice i dva vektora:

$$[K] \cdot \vec{\lambda} = \vec{D} \quad (16)$$

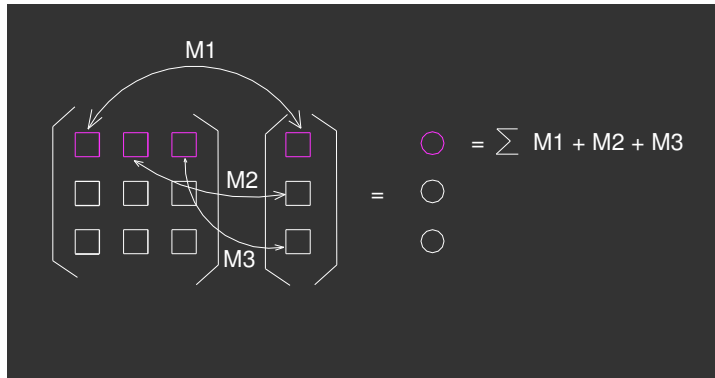
Razmotrimo npr. referentnu točku P i dvije dodatne točke 1 i 2, te jednadžbu (16) za slučaj a) bez sredine:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{P,1} \\ \sigma_{P,2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Za b) slučaj sa poznatom sredinom jednadžba (16) za referentnu P i dodatne dvije točke glasi:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{P,1} \\ \sigma_{P,2} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Matrični sustav računamo na slijedeći način: svaka vrijednost reda matrice pomnožena je sa odgovarajućom vrijednosti za vektor, te su one tada (red × stupac) zbrojene zajedno (slika 10).



Slika 10. Račun množenja matrice sa vektorom

U slučaju kriginga bez poznate sredine (a) odgovarajući sustav jednažbi tada glasi:

$$\sigma_{11} \cdot \lambda_1 + \sigma_{12} \cdot \lambda_2 + \mu = \sigma_{P,1}$$

$$\sigma_{21} \cdot \lambda_1 + \sigma_{22} \cdot \lambda_2 + \mu = \sigma_{P,2}$$

$$1 \cdot \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + 0 \cdot \mu = 1 \tag{19}$$

To je sustav 3 jednažbe sa 3 nepoznanice λ_1 , λ_2 i μ . Za slučaj sa poznatom sredinom (b) sustav glasi:

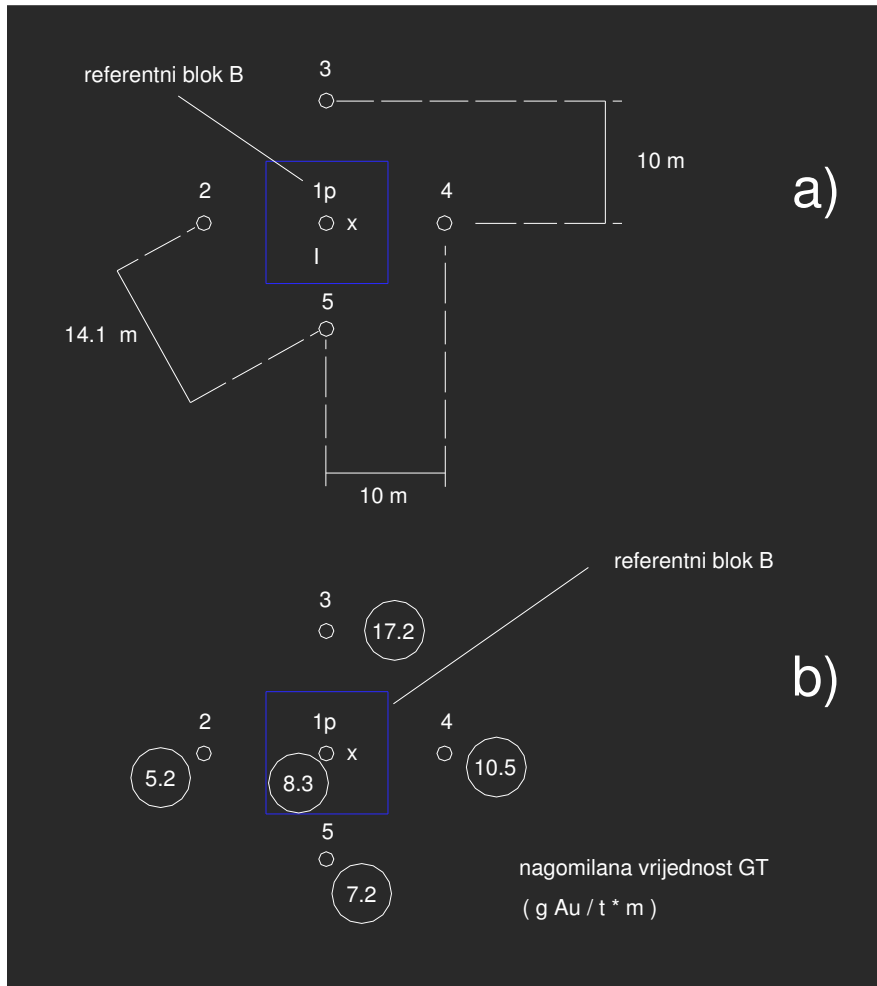
$$\sigma_{11} \cdot \lambda_1 + \sigma_{12} \cdot \lambda_2 = \sigma_{P,1}$$

$$\sigma_{21} \cdot \lambda_1 + \sigma_{22} \cdot \lambda_2 = \sigma_{P,2} \tag{20}$$

Nepoznanica μ se ovdje ne pojavljuje, te je zato ovaj sustav 2 jednažbi sa 2 nepoznanice jednostavniji.

4.2.2. Primjer Kriging metode bez poznate sredine

Sustav matrica i vektora prethodno objašnjen, primijenit ćemo na primjeru naslaga zlata spomenutom u poglavlju 2. Da bi naglasili princip, samo su točke najbliže referentnoj P uzete u obzir. To je točka I razreda, sa razmakom Δx , i četiri točke razreda II sa razmakom od 10 m. Točke su prikazane na slici 11, i numerirane su brojevima od 1 do 5. Važno je napomenuti da je variogram prikazan na slici 8 još uvijek važeći.



Slika 11 a-b. Izbušene rupe su uzete u račun kriginga točke

Prvi korak: Dobili smo sustav jednačbi za referentnu točku P i 5 izbušenih mjesta, odnosno za točke 1 do 5 (prema jednažbama 16 i 17):

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} & \sigma_{15} & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \sigma_{24} & \sigma_{25} & 1 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & \sigma_{34} & \sigma_{35} & 1 \\ \sigma_{41} & \sigma_{42} & \sigma_{43} & \sigma_{44} & \sigma_{45} & 1 \\ \sigma_{51} & \sigma_{52} & \sigma_{53} & \sigma_{54} & \sigma_{55} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{P,1} \\ \sigma_{P,2} \\ \sigma_{P,3} \\ \sigma_{P,4} \\ \sigma_{P,5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

(21)

Drugi korak: Koristeći simetriju matrice možemo računati sustav na slijedeći način:

1. Budući da su točke 2, 3, 4 i 5 na istoj udaljenosti od referentne točke P (udaljenost Δx za točku 1 je nevažna), tada i vrijednosti λ_2 , λ_3 , λ_4 i λ_5 moraju biti jednake. λ_2 je zamjenjena za ostale vrijednosti u λ vektoru.

2. Vrijednosti σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} , σ_{44} i σ_{55} na glavnoj dijagonali kriging matrice su također iste. To su varijance jedne točke unutar naslaga, te su zato jednake vrijednosti totalnog nagiba $C_0 + C_1$ (poglavlje 2.). Variogram sa slike 8 pokazuje:

$$\sigma_{ii} = C_0 + C_1 = 480.$$

3. Sve su udaljenosti od točke 1 prema točkama 2, 3, 4 i 5 jednake, iznose 10 m. Pretpostavimo li da je razlika Δx između referentne P i točke 1 nebitna, tada odnos vrijedi i za referentnu točku P. Tako kovarijance glase:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{14} = \sigma_{41} = \sigma_{15} = \sigma_{51} = \sigma_{P,2} = \sigma_{P,3} = \sigma_{P,4} = \sigma_{P,5} .$$

Udaljenost među tim točkama iznosi 10 m, a odgovarajuća vrijednost za kovarijancu 185 dobivena je iz variograma sa slike 8 (usporedite sa trećim i četvrtim redom tablice 2).

4. Razmak među točkama 2 i 3, 3 i 4, 4 i 5, te 5 i 2 su jednake i iznose 14.1 m. Zato:

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = \sigma_{34} = \sigma_{43} = \sigma_{45} = \sigma_{54} = \sigma_{52} = \sigma_{25} .$$

Za udaljenost od 14.1 m, odgovarajuća vrijednost 125 za kovarijancu dobivena je iz variograma sa slike 8 (usporedite sa trećim i četvrtim redom tablice 2).

5. Razmak između točaka 2 i 4, i 3 i 5 je isti, i iznosi 20. Vrijednost kovarijance je 65, dobivena je iz slike 8.

$$\sigma_{24} = \sigma_{42} = \sigma_{35} = \sigma_{53} .$$

6. Jedina vrijednost koja nije određena je kovarijanca $\sigma_{p,1}$ između referentne točke P i točke 1. Razmak među njima je Δx . To je vrijednost nagiba $C_1 = 310$ (2.) Matričnu jednadžbu (21) sada možemo pisati kao:

$$\begin{bmatrix} 480 & 185 & 185 & 185 & 185 & 1 \\ 185 & 480 & 125 & 65 & 125 & 1 \\ 185 & 125 & 480 & 125 & 65 & 1 \\ 185 & 65 & 125 & 480 & 125 & 1 \\ 185 & 125 & 65 & 125 & 480 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 310 \\ 185 \\ 185 \\ 185 \\ 185 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Treći korak: Matrica K ima 6 redaka i 6 stupaca, te je izvedeno 6 linearnih jednadžbi. Treba primijetiti kako su redovi (2) do (5) jednaki jer su linearno ovisni; determinanta sustava jednadžbi (2) do (5) jednaka je nuli.

a) Iste se vrijednosti uvijek javljaju u matrici K, ali su one zamjenjene (promijenjen je redosljed). Budući da se isti faktor uvijek javlja kod vektora λ , te zamjene nisu bitne.

b) λ_2 se uvijek javlja kod vektora λ .

c) Ista se vrijednost javlja uvijek kod vektora D, to je vrijednost 185.

Rezultat je slijedeći: sustav je reduciran na 3 jednadžbe, na red 1, 2 i 6 u matrici. Množenjem dobivamo slijedeće:

red 1:

$$\lambda_1 \cdot 480 + \lambda_2 \cdot 185 + \lambda_2 \cdot 185 + \lambda_2 \cdot 185 + \lambda_2 \cdot 185 + \mu = 310,$$

red 2:

$$\lambda_1 \cdot 185 + \lambda_2 \cdot 480 + \lambda_2 \cdot 125 + \lambda_2 \cdot 65 + \lambda_2 \cdot 125 + \mu = 185, \quad (23)$$

red 6:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_2 + \lambda_2 + \lambda_2 = 1.$$

Možemo sumirati:

$$\begin{aligned} 480 \cdot \lambda_1 + 740 \cdot \lambda_2 + \mu &= 310 \\ 185 \cdot \lambda_1 + 795 \cdot \lambda_2 + \mu &= 185 \\ \lambda_1 + 4 \cdot \lambda_2 &= 1 \end{aligned} \quad (24)$$

Četvrti korak: 3 su jednadžbe sa 3 nepoznanice λ_1 , λ_2 , i μ , koji se javlja u samo prve dvije jednadžbe. Lako ga možemo eliminirati oduzmemo li drugu jednadžbu sa prvom. Dobivamo slijedeće:

$$\begin{aligned} 480 \cdot \lambda_1 + 740 \cdot \lambda_2 + \mu &= 310 \\ - (185 \cdot \lambda_1 + 795 \cdot \lambda_2 + \mu &= 185) \\ = 295 \cdot \lambda_1 - 55 \cdot \lambda_2 &= 125 \end{aligned}$$

Peti korak: Sada imamo samo dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} 295 \cdot \lambda_1 - 55 \cdot \lambda_2 &= 125 \\ \lambda_1 + 4 \cdot \lambda_2 &= 1 \end{aligned}$$

drugi red možemo pisati i kao:

$$\lambda_1 = 1 - 4 \cdot \lambda_2$$

zamjena za λ_1 u prvom redu daje:

$$295 (1 - 4 \cdot \lambda_2) - 55 \cdot \lambda_2 = 125$$

$$295 - 1180 \cdot \lambda_2 - 55 \cdot \lambda_2 = 125$$

$$1235 \cdot \lambda_2 = -170$$

$$\lambda_2 = 0.138 .$$

Šesti korak: Pretpostavljamo da suma težinskih faktora mora biti jednaka 1, tada:

$$\lambda_1 + 4 \cdot \lambda_2 = 1$$

$$\lambda_1 = 0.448 .$$

Da bi odredili stupanj vrijednosti za referentnu točku P, odredili smo težinu za točku 1, iznosi 0.448, a za točke 2, 3, 4 i 5 težina iznosi 0.138.

Sedmi korak: Izračunata je nagomilana vrijednost za referentnu točku P:

$$x' = 0.448 \cdot 8.3 + 0.138 (5.2 + 17.2 + 10.5 + 7.2)$$

$$x' = 3.72 + 5.53 = 9.25 \text{ gAu/t}$$

Moramo primijetiti da ovu vrijednost ne možemo direktno usporediti sa onom dobivenom u poglavlju 2. jer smo u obzir uzeli samo 5 točaka prvog i drugog razreda. U ranijem primjeru uzeto je u razmatranje 9 točaka prvog, drugog i trećeg razreda.

Da bi dobili usporedive podatke, normalizirani težinski faktori razreda I i II uzimaju se iz stupca 7 i 8 tablice 2. To su:

→ za razred I : 0.30

→ za razred II : 0.18 .

Te se vrijednosti sada mogu direktno usporediti sa $\lambda_1 = 0.448$ i $\lambda_2 = 0.138$. Možemo zaključiti da kriging faktori pridružuju bitno veću vrijednost točki 1 u centru bloka, jer su oni najbolji linearni procjenitelji.

Pod normalnim okolnostima linearni sustavi sa nekoliko nepoznanica rješivi su programiranim kalkulatorom ili računalom.

4.2.3. Primjer Kriging metode sa poznatom sredinom

Za primjer ćemo uzeti naslage zlata iz poglavlja 2. i 4.2.2. Prije smo pokazali da je jedina razlika u jednadžbama sustava kod ove dvije metode, sa poznatom sredinom ili bez poznate sredine, manjak uvjeta

$$\sum \lambda_i = 1 .$$

Zato suma težinskih faktora mora biti 1. Razlika između ove sume i 1 je tako pridružena težinskom faktoru sredine x' . Možemo primijeniti matrice jednadžbe (21) i (22) ; šesti red i šesti stupac su tada ispušteni iz kriging matrice, kao i Lagrangeov multiplikator μ iz vektora λ i zadnja vrijednost 1 iz vektora D. Kao rezultat, sustav jednadžbi (23) i (24) je reduciran na dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice λ_1 i λ_2 :

$$\begin{aligned} 480 \cdot \lambda_1 + 740 \cdot \lambda_2 &= 310, \text{ i} \\ 185 \cdot \lambda_1 + 795 \cdot \lambda_2 &= 185. \end{aligned} \quad (25)$$

Da bi riješili ove jednačbe, prvu jednačbu množimo sa faktorom , tako da sada počinje sa $185 \cdot \lambda_1$. To je dakle faktor $185 / 480 = 0.39$. Slijedi:

$$\begin{aligned} (480 \cdot \lambda_1 + 740 \cdot \lambda_2) \cdot 0.39 &= 310 \cdot 0.39 \\ 185 \cdot \lambda_1 + 795 \cdot \lambda_2 &= 185, \end{aligned} \quad (26)$$

dakle:

$$\begin{aligned} 185 \cdot \lambda_1 + 288.6 \cdot \lambda_2 &= 120.9 \\ 185 \cdot \lambda_1 + 795 \cdot \lambda_2 &= 185. \end{aligned}$$

Drugu jednačbu možemo oduzeti od prve, i dobivamo:

$$\begin{aligned} -506.40 \cdot \lambda_2 &= -64.1 \\ \text{ili} \quad \lambda_2 &= 0.127. \end{aligned}$$

Zamjenom ove vrijednosti sa jednom iz dviju jednačbi (25) dobivamo:

$$\begin{aligned} 480 \cdot \lambda_1 + 740 \cdot 0.127 &= 310 \\ 480 \cdot \lambda_1 &= 216.0 \\ \lambda_1 &= 0.450. \end{aligned}$$

Znamo da je suma svih težinskih faktora i 1 predstavljena težinskim faktorom za sredinu naslaga x^{\prime} .

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 4 \cdot \lambda_2 &= 0.450 + 0.508 = 0.958, \text{ zato} \\ 1 - \lambda_1 - 4 \cdot \lambda_2 &= 1 - 0.958 = 0.042. \end{aligned}$$

Težinski faktor sredine je dakle 0.042.

Pretpostavimo da je sredina nagomilane vrijednosti 12.5 g Au/t·m; tada primjer sa slike 11b daje slijedeću nagomilanu vrijednost, relativno prema referentnoj točki:

$$\begin{aligned} x^{\prime} &= 0.45 \cdot 8.3 + 0.127 (5.2 + 17.2 + 10.5 + 7.2) + 0.042 \cdot 12.5 \\ x^{\prime} &= 3.74 + 5.09 + 0.53 = 9.26 = m_K \end{aligned}$$

Vrijednost m_K poznata je kao procjenitelj kriging metode.

4.3. Kriging bloka

Kriging točke uzima u obzir samo odnose među individualnim uzorcima točaka; to su bile u prošlom primjeru izbušene rupe. No, ne uzima u obzir veličinu bloka. Kriging bloka koristi kovarijance točaka, u odnosu na referentni blok.

Kriging bloka ćemo prikazati bez sredine i sa poznatom sredinom. Jednačba (27) još uvijek vrijedi:

$$[K] \cdot \lambda = D \quad (27)$$

gdje je $[K]$ kriging matrica, λ vektor sa težinskim faktorima λ_1 do λ_n . Vektor D sadrži kovarijance točaka u odnosu na blok B:

$$\rightarrow D = \begin{bmatrix} \sigma_{B,1} \\ \sigma_{B,2} \\ \vdots \\ \sigma_{B,n} \\ 1 \end{bmatrix}$$

To je vektor za kriging metodu bez poznate sredine. Zadnja vrijednost 1 je izostavljena kod kriging metode sa poznatom sredinom.

Primjena tehnike kriginga bloka može biti objašnjena na primjeru naslaga zlata. Korištena je ista konfiguracija kao i na slici 11, a referentni blok B ima centralnu izbušenu rupu 1. Ta je točka, zajedno sa 4 susjedne izbušene rupe, uključena u ovu vježbu.

Objasnit ćemo kriging sa nepoznatom sredinom koristeći matrični sustav, analogno jednadžbi (21):

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} & \sigma_{15} & 1 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \sigma_{24} & \sigma_{25} & 1 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & \sigma_{34} & \sigma_{35} & 1 \\ \sigma_{41} & \sigma_{42} & \sigma_{43} & \sigma_{44} & \sigma_{45} & 1 \\ \sigma_{51} & \sigma_{52} & \sigma_{53} & \sigma_{54} & \sigma_{55} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{B,1} \\ \sigma_{B,2} \\ \sigma_{B,3} \\ \sigma_{B,4} \\ \sigma_{B,5} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

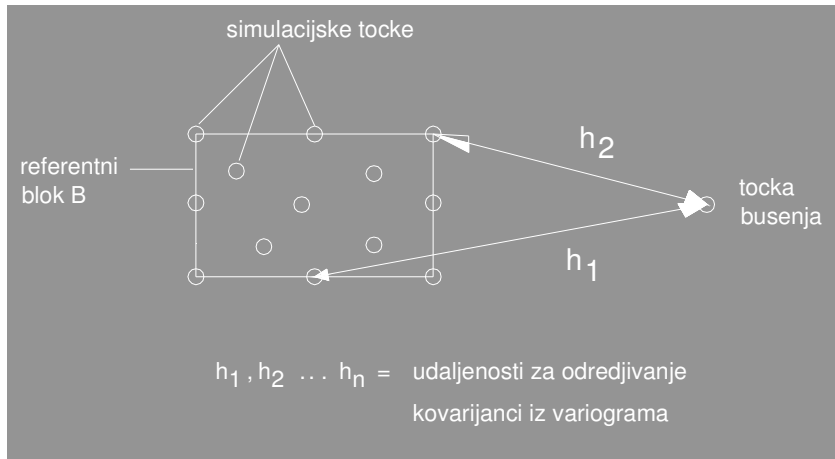
Sve vrijednosti σ_{ii} i σ_{ij} određene su za kriging matricu u poglavlju 1.4.2.2., gdje smo u obzir uzeli simetriju λ -vektora. Rezultate možemo dobiti iz jednadžbe (22). Vektor D je jedina nepoznanica koja se mora odrediti još jedanput, a uključuje kovarijance između izbušenih rupa 1 do 5 i referentnog bloka B.

Prvi korak: S obzirom na simetriju grida izbušenih rupa, vidimo da rupe 2, 3, 4 i 5 imaju isto mjesto u odnosu na referentni blok B. Zato vrijedi slijedeće:

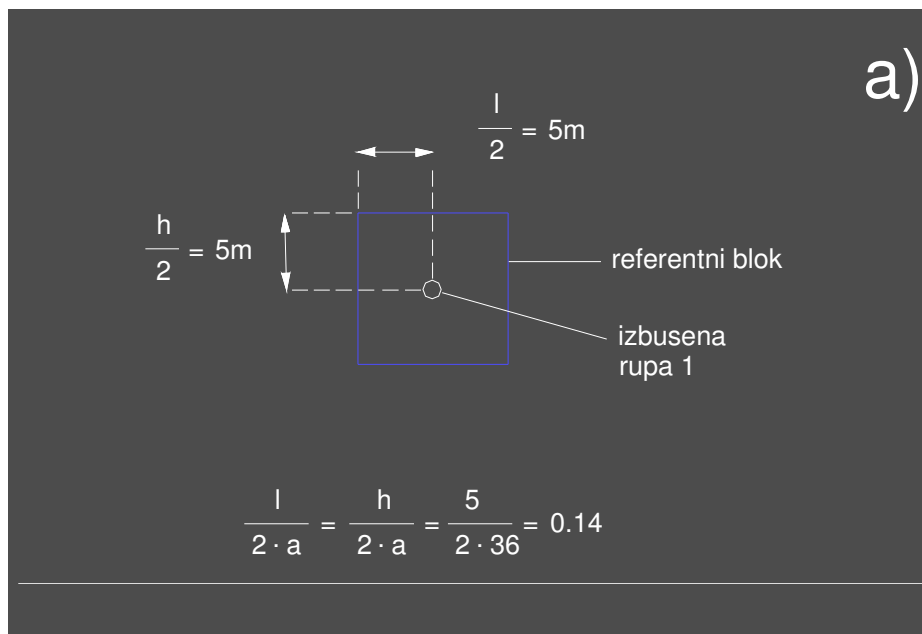
$$\sigma_{B,2} = \sigma_{B,3} = \sigma_{B,4} = \sigma_{B,5}$$

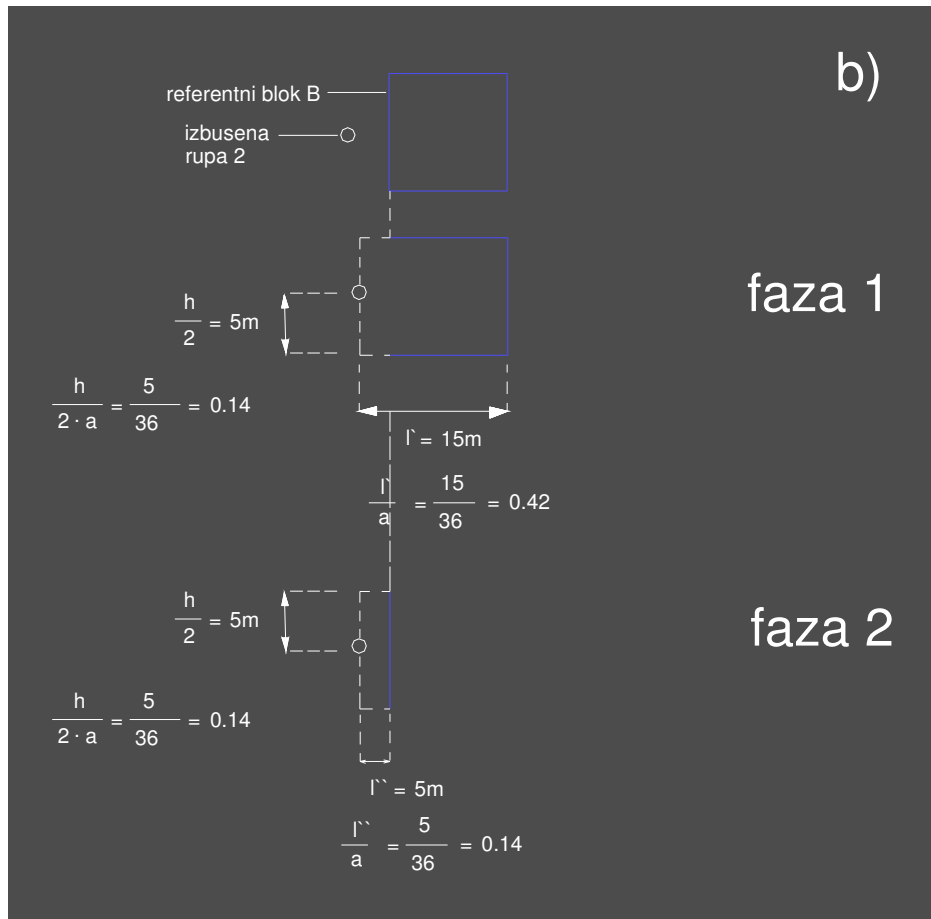
Moramo odrediti dvije kovarijance: $\sigma_{B,1}$ i $\sigma_{B,2}$.

Drugi korak: Kovarijance između točke, u ovom slučaju izbušenih rupa, i bloka dobivamo iz variograma ako zamijenimo blok sa brojnim točkama unutar bloka (teoretski se radi o beskonačnom broju točaka, a u praksi od 9 do 16). Tada su kovarijance određene iz variograma za udaljenost h_i između izbušenog mjesta i svake od simuliranih točaka unutar bloka, a te su vrijednosti onda osrednjavane, slika 12 .



Slika 12. Metoda računanja kovarijanci između točke i bloka





Slika 13 a-b. Metoda računanja kovarijanci između referentnog bloka i rupe 1 (a), te rupe 2 (b) za naslage zlata sa sl.7

Dimenzije bloka h i l , kao i udaljenosti od rubova bloka, moraju biti normalizirane za rang a variograma. Variogram sa slike 8 je važeći za naslage zlata koje razmatramo, i rang iznosi 36 m. Pogledajmo prvo rupu 1 u centru referentnog bloka B (slika 13a). Blok je kvadrat, dakle $l = h$.

Udaljenost od izbušene rupe 1 do rubova bloka iznosi $l/2$. Normalizirana je za rang a , i slijedi:

$$\frac{l}{2 \cdot a} = \frac{h}{2 \cdot a} = \frac{10}{2 \cdot 36} = 0.14$$

Funkcija $(1-H)$ se koristi kod pravilnih blokova, a vrijednosti se očitavaju sa odgovarajućih tablica. Za ovu vrijednost (0.14) funkcija $(1-H)$ je interpolirana iz odgovarajuće tablice:

$$(1-H) \text{ za } (0.14 / 0.14) = 0.826.$$

Tada je kovarijanca $\sigma_{B,1}$:

$$\sigma_{B,1} = C_1 \cdot (1-H) .$$

Iz variograma sa slike 8 vidimo da $C_1 = 310$, tako da je kovarijanca:

$$\sigma_{B,1} = 310 \cdot 0.826 = 256.$$

Treći korak: Ispitujemo kovarijancu između rupe 2 i referentnog bloka B. Određena je također pomoću funkcije $(1-H)$. Budući da je rupa smještena izvan bloka (slika 13b), ispitivanje je provedeno po fazama. Prvo smo odredili funkciju $(1-H)$ za utjecaj rupe 2 na području $h/2, l'$ (1. faza, slika 13b), a zatim za utjecaj na području $h/2, l''$ (2. faza, slika 13b). Težina za ove dvije vrijednosti je određena pomoću razlike ova dva područja.

Prva faza: $(1-H)$ vrijednost za $(0.42 / 0.14)$ je očitana sa odgovarajuće tablice, i iznosi 0.664.

Druga faza: U koraku 2 smo odredili $(1-H)$ vrijednost za $(0.14 / 0.14) = 0.826$.

Treća faza: Dolazimo do težinskih razlika:

$$\Delta(1-H) = \frac{1.5 \cdot 0.664 - 0.5 \cdot 0.826}{1.5 - 0.5} = 0.583$$

Ta nam je vrijednost potrebna da bi izračunali kovarijancu $\sigma_{B,2}$:

$$\sigma_{B,2} = C_1 \cdot \Delta(1-H) = 310 \cdot 0.583 = 181.$$

Četvrti korak: Sada imamo sve potrebne vrijednosti za matrični sustav:

$$[K] \cdot \lambda = D.$$

Pišemo:

$$\begin{bmatrix} 480 & 185 & 185 & 185 & 185 & 1 \\ 185 & 480 & 125 & 65 & 125 & 1 \\ 185 & 125 & 480 & 125 & 65 & 1 \\ 185 & 65 & 125 & 480 & 125 & 1 \\ 185 & 125 & 65 & 125 & 480 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 256 \\ 181 \\ 181 \\ 181 \\ 181 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(29)

Sustav možemo riješiti slično kao u poglavlju 4.2.2.

$$\begin{aligned} 480 \cdot \lambda_1 + 740 \cdot \lambda_2 + \mu &= 256 \\ 185 \cdot \lambda_1 + 795 \cdot \lambda_2 + \mu &= 181 \\ \lambda_1 + 4 \cdot \lambda_2 &= 1. \end{aligned}$$

(30)

Rezultat glasi:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.287 \\ \lambda_2 &= 0.178, i \\ \mu &= -13.798. \end{aligned}$$

Peti korak: Nagomilana vrijednost za blok x' , može se izračunati sa težinskim faktorima po metodi već pokazanoj u sedmom koraku poglavlja 4.2.2. Nagomilana vrijednost za rupu 1 označena je sa λ_1 a za rupe 2,3,4 i 5 sa λ_2 (slika 11b):

$$\begin{aligned} x' &= 0.287 \cdot 8.3 + 0.178(5.2 + 17.2 + 10.5 + 7.2) \\ x' &= 2.38 + 7.14 = 9.52 \text{ g Au/t} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

5. Zaključak

U tablici 3 smo usporedili dobivene rezultate za referentnu točku P dobivene pomoću 3 metode, te rezultat za referentni blok B dobiven pomoću kriginga bloka. Tri metode korištene za određivanje rezultata za referentnu točku P su:

- težinski faktori dobiveni direktno iz variograma
- težinski faktori (kriging faktori) dobiveni tehnikom kriginga bez poznate sredine, i
- težinski faktori (kriging faktori) dobiveni tehnikom kriginga sa poznatom sredinom.

Metoda	Tezinski faktori direktno iz variograma	Metoda kriginga tocke		Metoda kriginga bloka
		Bez poznate sredine	Sa poznatom sredinom	Bez poznate sredine
Tezinski faktor za centralnu izbusenu rupu 1	0.30	0.448	0.450	0.287
Tezinski faktor za rubne rupe 2,3,4 i 5	0.18	0.138	0.127	0.178
Tezinski faktor za sredinu naslaga	—	—	0.042	—
Tezinska vrijednost za referentnu tocku P	9.71	9.25	9.36	9.52

Tablica 3. Usporedba težinskih faktora dobivenih različitim metodama

Vidimo da dvije metode kriginga točke za određivanje vrijednosti točke P, daju gotove identične rezultate. To ovisi o sredini x' .

Kod metode dobivanja težinskih faktora direktno iz variograma, gdje su korištene kovarijance, dobivamo vrijednost za oko 4 % veću od one dobivene krigingom točke. To je uglavnom prihvatljiva točnost.

Usporedimo li vrijednosti dobivene krigingom točke i krigingom bloka, vidimo da je bitno manja težina dana centralnim vrijednostima u bloku, a veća vanjskim točkama (izbušenim rupama). Rezultat je vidljiv kod računanja kovarijance između rupa i bloka (slika 12). Krajnja mjesta bloka su smještena na skoro istoj udaljenosti od centralne rupe, kao i vanjske rupe. Zato težinski faktori moraju biti u ravnoteži da bi se mogli usporediti sa metodom točke u centru bloka.

Najbolji način za provjeru koja metoda daje najbolji rezultat su tehnike poprečnog vrednovanja (Isaaks i Srivastava 1989). Takve tehnike možemo teoretski primijeniti na procjene u tablici 3. To su tehnike kod kojih se vrijednosni podaci ispuštaju jedan po jedan, a procjene se računaju bez te vrijednosti. Usporedimo li dvije serije uzoraka različitog karaktera pomoću kriginga točke, tada taj slučaj možemo razmatrati u praktičnim terminima kao što je i poprečno vrednovanje.

Ako imamo više uzoraka, ovu tehniku koristimo da bi vidjeli da li je metoda primjenjiva; da li je model povezan sa eksperimentalnim variogramom prihvatljiv, ili ga možemo poboljšati. Moramo ispitati rezidualne, odnosno razlike između prave i izračunate vrijednosti. Centar i raspon statističke distribucije moraju biti što bliže nuli. Važno je znati da u ranijim fazama istraživanja nemamo dovoljno podataka za računanje valjanog poprečnog vrednovanja.

Međutim, ostaje nam pitanje koliko su dobre geostatističke procjene, posebno kriging tehnika, u usporedbi sa ostalim metodama i sa stvarnim rezultatima iskopa. U tablici 4 vidimo nekoliko primjera koji pokazuju relativno dobru izvedbu krigingove procjene.

Rudna nalazista	Klasa rude	Procjena pomocu kriginga	Ostale procjene	Usporedba	
Rudnik Louvem, Quebec, Kanada	2.04	2.04 (kriging sa blok omotom) 2.07 / 2.24 kriging sa geoloskim omotom	a) 2.51 b) 3.04 c) 2.62 konvencionalne oslabljene metode	Vallee i ostali (1977)	
Rudnik bakra, Pima, Arizona, SAD	0.0 relativno	- 0.03 (procjena)	- 0.03 modificirana tezinska udaljenost - 0.05 obrnuta tezinska udaljenost kvadrirana - 0.06 poligoni (procjene)	Knudsen i ostali (1978)	
Rudnik bakra, Similkameen Britanska Kolumbija Kanada	100.0 relativno	101.0 relativno	116 poligoni 120 modificirana tezinska udaljenost (relativno)	Raymond (1979)	
Jezero Walker Nevada set uzoraka (geokem. podaci)	436.5 ppm	444.5 ppm obican kriging	488.0 ppm poligoni	Isaaks i Srivastava (1989)	
Rudnik bakra Novi Juzni Wales Australija	6.0 - 6.5% Cu 3.5 - 4.0% Cu	6.61 % Cu 4.29 % Cu indikator kriging	11.10 % 6.46 % klasicne procjene	10.37 % 5.84 % metoda 3D modela	Carswell i Schofield (1993)
Broken Hill naslage bakra, olova, cinka i srebra Aggeneys, Juzna Afrika	100.0 Cu 100.0 Pb 100.0 Zn 100.0 Ag relativno	98.0 Cu 107.0 Pb 100.5 Zn 104.5 Ag	120.0 Cu 112.0 Pb 113.0 Zn 114.0 Ag poligoni, procjena	Nowak (1994)	

Tablica 4. Usporedba stvarnih i procjenjivanih klasa ruda

Champigny i Armstrong (1993) su pratili korištenje geostatistike kod procjene zlatnih naslaga. 79 % tvrtki je našlo dobru vezu glede oblika proizvodnje, 11 % promjenjivu vezu, a 5 % tvrtki nije našlo nikakav sporazum.

Na samom početku izlaganja istaknuli smo kako kriging omogućuje najbolju linearnu procjenu sa minimalnom varijancom. Iako je nagib reduciran primjenom kriging metode, on još uvijek postoji. Da bi se reducirao ili čak eliminirao, primjenjuju se posebne kriging tehnike poput rastavnog kriginga. To je najzahtjevnija

kriging tehnika, bez računala je nezamisliva. Primjenjuje je samo u konačnim fazama vrednovanja.

Moramo još napomenuti kako geostatistički rezultati mogu biti samo u rangu modela koji odgovara rudnim geološkim i strukturalnim parametrima.

6. Literatura

- Wellmer, F.-W. : Statistical Evaluations in Exploration for Mineral Deposits
- izdavač : Springer, 1998.