Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Iva Kodrnja

Modeli modularnih krivulja, modularne forme i η-kvocijenti

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2016.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Iva Kodrnja

Models for Modular Curves, Modular Forms and η-quotients

DOCTORAL THESIS

Zagreb, 2016

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Iva Kodrnja

Modeli modularnih krivulja, modularne forme i η-kvocijenti

DOKTORSKI RAD

Mentor:
prof.dr.sc. Goran Muić

Zagreb, 2016.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Iva Kodrnja

Models for Modular Curves, Modular Forms and η-quotients

DOCTORAL THESIS

Supervisor:
prof.dr.sc. Goran Muić

Zagreb, 2016

Sažetak

U ovom radu traže se modeli modularnih krivulja, posebno krivulja $X_0(N)$. Koristi se metoda koju je razvio G. Muić. Metoda preslikava modularnu krivulju, koja je kompaktna Riemannova ploha, u projektivnu ravninu pomoću tri modularne forme neke parne težine na odgovarajućoj modularnoj grupi.

U radu je razvijen algoritam koji računa stupanj i definirajući polinom dobivene krivulje, što je jedan od znanstvenih doprinosa ovog rada. Taj je algoritam implementiran u programu *Sage* i njime su izračunani svi korišteni primjeri.

Za primjenu ove metode odabrana je klasa modularnih formi η-kvocijenti.

Proučavani su η-kvocijenti koji su modularne forme na modularnim grupama $\Gamma_0(p)$, za prost broj p, te izračunani stupnjevi preslikavanja definiranih pomoću tih formi, u slučajevima kada su nađena tri linearno nezavisna η-kvocijenta.

Određeni su oni η-kvocijenti težine 12 koji imaju nulu maksimalnog reda u kuspu ∞, označimo ih s $\Delta_{N,12}$. Pomoću funkcija $\Delta_{N,12}, \Delta$ i $\Delta(N\cdot)$ nađeni su modeli nekih modularnih krivulja $X_0(N)$ stupnja $\dim M_{12}(\Gamma_0(N)) + g(\Gamma_0(N)) - 2$.

U slučaju kada je N složen broj i $X_0(N)$ nema eliptičkih točaka korišteni su η-kvocijenti težine 2 i pomoću njih konstruirani modeli za neke krivulje $X_0(N)$. Pretpostavljamo da se takav model može konstruirati za svaku krivulju $X_0(N)$ koja nema eliptičkih točaka no tu tvrdnju nismo dokazali.

Zaključujemo da se pomoću klase funkcija η-kvocijenti mogu naći brojni modeli modularne krivulje $X_0(N)$ različitih stupnjeva.

Prošireni sažetak

Neka je Γ modularna grupa, odnosno podgrupa konačnog indeksa u $SL_2(\mathbb{Z})$. Ona djeluje na gornju kompleksnu poluravninu linearnim frakcionalnim transformacijama. Kada pogledamo kvocijent gornje poluravnine po tom djelovanju, dobivamo skup $X(\Gamma)$ na kojem se može definirati struktura glatke Riemannove plohe. On se još dodatno kompaktificira dodavanjem kuspova - elemenata skupa proširenih realnih brojeva koji su jedinstvene fiksne točke nekog elementa iz Γ. Skup $X(\Gamma)$ sastoji se od orbita elemenata skupa gornje poluravnine i klasa neekvivalentnih kuspova. Skup $X(\Gamma)$ nazivamo modularna krivulja. Za grupu $\Gamma_0(N)$ taj kvocijent označavamo $X_0(N)$ i nazivamo glavna modularna krivulja.

Promatra se sljedeće preslikavanje - elementu modularne krivulje $X(\Gamma)$ pridružena je točka projektivne ravnine $(f(z) : g(z) : h(z))$, gdje su f, g i h neke tri linearno nezavisne modularne forme za promatranu modularnu grupu Γ parne težine veće ili jednake 2. Ovo preslikavanje je u stvari preslikavanje definirano meromorfnim funkcijama $1, g/f$ i h/f i to je preslikavanje holomorfno. Dokazana je formula koja veže stupanj preslikavanja i stupanj slike. Ukoliko je stupanj preslikavanja jednak 1, dobivena ravninska projektivna krivulja je model početne modularne krivulje.

Iz formule se izvodi test kojim se provjerava da li je preslikavanje biracionalna ekvivalencija tako da se izračunaju sve vrijednosti izuzev stupnja preslikavanja. Računanje se razdvaja u dva smjera. Prvi se odnosi na računanje divizora modularnih formi. Za računanje divizora prvo je potrebno odrediti kuspove te treba znati Fourierove razvoje modularnih forme u kuspovima. Opisani su kuspovi na kongruencijskim podgrupama te izračunani divizori formi Δ, Eisensteinovog reda E_4^3 te η-kvocijenata na kongruencijskog podgrupi $\Gamma_0(N)$.

Drugi smjer bavi se izračunom stupnja dobivene krivulje. U tu svrhu razvijen je algoritam koji provjerava stupanj dobivene krivulje i nalazi jednadžbu dobivene krivulje.

Stupanj krivulje je povezan s rangom matrice koeficijenta homogenog sustava dobivenog iz činjenice da je homogena linearna kombinacija modularnih formi ponovo modularna forma te da određen broj početnih članova u Fourierovom razvoju modularne forme mora iščezavati da bi forma bila nul-forma (takozvana Sturmova ocjena, a za kongruencijske podgrupe slijedi iz formule valencije). Algoritam se bazira na tvrdnjama iz algebarske geometrije (Hilbertov teorem o nulama), linearne algebre te teorije modularnih formi.

η-kvocijenti su klasa modularnih formi dobivenih iz Dedekindove η-funkcije množenjem i skaliranjem. Uz određene uvjete ove su funkcije modularne forme na $\Gamma_0(N)$. Vrlo su pogodne za računanje jer postoji formula za red u kuspu te je jednostavno izračunati divizor. Imaju cjelobrojne koeficijente u Fourierovom razvoju. Nađeni su η-kvocijenti težina 2, 4, 6 i 12 na $\Gamma_0(p)$, za prost broj p i gledana preslikavanja u projektivnu ravninu. Posebno gledamo preslikavanje s $X_0(N)$ definirano s Δ, E_4^3 i Δ_N. Određeni su oni η-kvocijenti težine 12 koji imaju nulu maksimalnog redu u kuspu ∞ te pomoću njih konstruirani modeli krivulja $X_0(N)$.

Ključne riječi: kompaktne Riemannove plohe, modularne grupe, modularne krivulje, modularne forme, divizori modularnih formi, η-kvocijenti

Extended summary

Modular group Γ is a subgroup of $SL_2(\mathbb{Z})$ of finite index. A modular group acts on the complex upper half plane by linear fractional transfomations. Quotient of this action is a set $X(\Gamma)$ which is compactified by adding cusps. Cusps are real numbers or ∞ which are fixed by some parabolic element in Γ. On the set $X(\Gamma)$ we can define complex structure so it becomes a compact Riemann surface. The set $X(\Gamma)$ is called a modular curve and it consists of orbits of elements of the upper half plane and classes of nonequivalent cusps. If Γ is the congruence subgroup $\Gamma_0(N)$, then this quotient is denoted $X_0(N)$.

We observe the following mapping - an element of the modular curve $X(\Gamma)$ is mapped into a point in the projective plane using three linearly independent modular forms of some even weight greater or equal to 2. This mapping is holomorphic. We prove a formula which connects the degree of the map and the degree of the image curve. If the degree of the map equals 1, then the image curve is a model of the modular curve $X(\Gamma)$.

From the formula we can check whether the map is birational equivalence by computing all values except the degree of the map. There are two directions in calculations. On one hand, we need to calculate the divisors of the modular forms. We describe the cusps of congruence subgroups and calculate the divisors of the Ramanujan delta function Δ, Eisenstein series E_4 and various η-quotients with regard to the group $\Gamma_0(N)$. On the other hand, we calculate the degree of the image curve. We develop an algorithm which calculates this degree and the defining polynomial. The degree is connected to the rank of a matrix of the coefficients of a homogeneous system of equations. The system is obtained from the fact that a finite number of coefficient in the Fourier expansion of a modular form must be equal to zero if a form is zero. This finite number of coefficients is calculated from the Sturm bound. The algorithm is based on the Hilbert zero theorem, linear algebra and the theory of modular forms.

A class of modular forms called η-quotients are obtained by multiplication and scaling from the Dedekind η-function. Under certain assumptions, these functions are modular forms on $\Gamma_0(N)$. There is a formula for the divisor of an η-quotient and they have integral Fourier expansions. We search for η-quotients on $\Gamma_0(p)$ for a prime p and create mappings with these functions. We observe the map from $X_0(N)$ defined with Δ, E_4^3 and Δ_N. We determine those η-quotients that have the zero of the maximal order at the cusp ∞ and use these functions to create models of $X_0(N)$.

Keywords: compact Riemann surface, modular group, modular curve, modular form, divisor of modular form, η-quotients

Sadržaj

Uvod

Glavna modularna krivulja $X_0(N)$ je kvocijent djelovanja kongruencijske grupe $\Gamma_0(N)$ na proširenu gornju poluravninu $\mathbb{H}^*$. Krivulja $X_0(N)$ u uskoj je vezi s eliptičkim krivuljama. S jedne strane, krivulja $X_0(N)$ je prostor parametara za eliptičke krivulje skupa sa strukturom cikličke podgrupe reda N. To jest, točke krivulje $X_0(N)$ odgovaraju klasama izomorfnih eliptičkih krivulja s podgrupom reda N. Slično vrijedi i za krivulje $X(1), X(N), X_1(N)$. Opširnije se može naći u [11], §1.5, posebno Teorem 1.5.1 daje opis prostora parametara eliptičkih krivulja s nekim svojstvom.

Druga važna veza je teorem modularnosti koji govori o postojanju surjektivnog preslikavanja s krivulje $X_0(N)$ na eliptičku krivulju. Postoji mnogo varijanata tog teorema, u knjizi [11] može se naći osam varijanti (Teorem 2.5.1, Teorem 7.7.2, Teorem 7.7.4, Teorem 7.7.5, Teorem 8.8.3, Teorem 8.8.4, Teorem 9.6.2, Teorem 9.6.3) jer modularnu krivulju i eliptičku krivulju možemo promatrati na više načina, kao kompaktne Riemannove plohe, kao krivulje nad $\mathbb{C}$, kao krivulje nad $\mathbb{Q}$ i tako dalje.

Navodimo teorem koji promatra krivulje kao Riemannove plohe, Teorem 2.5.1 iz [11].

Teorem 0.1 *Neka je E eliptička krivulja nad poljem $\mathbb{C}$ za koju je modularna invarijanta $j(E)$ racionalan broj. Tada za neki $N > 0$ postoji surjektivna holomorfna funkcija kompaktnih Riemannovih ploha*

$$X_0(N) \to E.$$

Funkcijsko polje modularne krivulje naziva se *modularno funkcijsko polje.* Funkcijsko polje glavne modularne krivulje generirano je nad $\mathbb{C}$ s j i $j(N\cdot)$, [44], to je polje transcendentno nad $\mathbb{C}$ stupnja 1.

Jednadžba klasične modularne krivulje $X_0(N)$, koja je minimalni polinom od $j(N\cdot)$ nad poljem $\mathbb{C}(j)$, naziva se *modularni polinom* ili *modularna jednadžba*, no taj polinom je teško izračunati, [9], [7]. On ima jako velike cjelobrojne koeficijente, stupnja je $\Psi(N)$ pa nije prikladan za numeričke račune. Upravo zbog nepraktičnosti modularnog polinoma, počela je potraga za drugim modelima glavne modularne krivulje.

U članku [36] N. Murabayashi prezentira algoritam koji računa normalnu formu za hipereliptičke modularne krivulje. Uvjet je da Fuchsova grupa ima kusp ∞. Promatraju se krivulje genusa 2 (sve takve su hipereliptičke). Algoritam koristi kusp forme težine 2 ($\dim S_2(\Gamma) = g(\Gamma)$). Pokazano da je dovoljno vrlo malo (najviše 13) koeficijenata da se odredi normalna forma $y^2 = f(x)$ (f je separabilan polinom stupnja 5 ili 6). Dakle, stupanj dobivenog modela je 5 ili 6. Izračunate su normalne forme krivulja $X_0(N)$ za $N = 23, 29, 31, 37$.

U [14] E. Gonzales je odredio jednadžbe za hipereliptičke krivulje $X_0(N)$ pri čemu je koristio η-kvocijente. Članak se oslanja na činjenicu da je funkcijsko polje hipereliptičkih modularnih krivulja generirano s dvije funkcije koje su u posebnom odnosu s obzirom na hipereliptičku involuciju. U svom doktorskom radu [29] K. McMurdy također koristi η-kvocijente za traženje modela modularnih krivulja $X_0(N)$. Y. Yang u članku [47] koristi poopćene Dedekindove η-funkcije definirane s:

$$E_g(\tau) = q^{NB(g/N)/2} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - q^{(m-1)N+g}\right) \left(1 - q^{mN-g}\right)$$

za $g \not\equiv 0 (\mod N)$ i $B(x) = x^2 - x + 1/6$.

Promatraju se funcije oblika $\prod_{g=1}^{N-1} E_g(\tau)^{e_g}$ i pokazuje se da uz neke kongruencijske uvjete na g i e_g te funkcije generiraju grupu modularnih funkcija na $\Gamma_1(N)$ koje imaju polove u ∞, odnosno u kuspovima koji su $\Gamma_1(N)$-ekvivalentni kuspu ∞. Izračunate su jednadžbe krivulja $X(N)$, $X_1(N)$ i $X_0(N)$ za neke vrijednosti brojeva N i one su optimalne u smislu da je stupanj modela malen, na primjer eliptičke krivulje imaju stupanj 3, koeficijenti su mali.

U člancima [16] i [17] N. Ishida i N. Ishii nalaze jednadžbe krivulja $X(N)$ odnosno $X_1(N)$. Nađeni su generatori funkcijskih polja, u slučaju polja $X(N)$ to su Kleinove funkcije, te su nađene polinomijane veze između dva generatora.

U doktorskom radu [13] S. Galbraith koristi kanonsko ulaganje - modularnu krivulju $X_0(N)$ genusa g koja nije hipereliptička pomoću kusp formi težine 2 ulaže u projektivni prostor $\mathbb{P}^{g-1}$ koristeći činjenicu da kusp forme težine 2 za $\Gamma_0(N)$ odgovaraju holomorfnim diferencijalima na $X_0(N)$. Kanonsko preslikavanje je injektivno ako je genus veći od 1 i krivulja nije hipereliptička. Spominje ideju konstrukcije preslikavanja u projektivni prostor preko modularnih formi veće težine.

Tu ideju koristi G. Muić i u člancima [33],[32] i [35] razrađuje metodu nalaženja modela pomoću modularnih formi. U članku [33] nalazi bazu prostora kusp formi neke cijele težine k za proizvoljnu Fuchsovu grupu prve vrste koja se sastoji od formi koje reprezentiraju linearne funkcionale $f \mapsto \frac{d^l f}{dz^l}|_{z=\xi}$ pomoću skalarnog produkta. U članku [32] gledaju se holomorfna preslikavanja $X(\Gamma) \to \mathbb{P}^{t_m-1}$ definirana s

$$\mathfrak{a}_z \mapsto (f_0(z) : \cdots : f_{t_m-1}),$$

gdje je Γ neka Fuchsova grupa prve vrste, $m \geq 3$, $t_m = \dim S_m(\Gamma)$ i $f_0, \ldots, f_{t_m-1}$ baza za $S_m(\Gamma)$. Ako je $t_m \geq g+2$, gdje je g genus grupe Γ, tada je to preslikavanje ulaganje, to jest biracionalna ekvivalencija s ireducibilnom glatkom projektivnom krivuljom u $\mathbb{P}^{t_m-1}$ stupnja $t_m + g - 1$. Pomoću funkcija iz članka [33] nalazi modele krivulja $X(\Gamma)$ u $\mathbb{P}^k$, za $k \geq g+1$. Članak [34] daje primjenu metode na krivulju $X(1) = X(SL_2(\mathbb{Z}))$ i nalazi krivulje u $\mathbb{P}^2$ koje su biracionalno ekvivalentne s $X(1)$.

U članku [35] razvijena je metoda kojom se mogu naći ravninski projektivni modeli Riemannovih ploha $X(\Gamma)$. Gleda se preslikavanje s $X(\Gamma)$, za proizvoljnu Fuchsovu grupu Γ, u projektivnu ravninu definirano s tri linearno nezavisne modularne forme s karakterom na Γ. Dokazana je formula koja uključuje stupanj tog preslikavanja, stupanj dobivene projektivne krivulje, stupnjeve divizora modularnih formi koje definiraju preslikavanje te numeričke podatke o Fuchsovoj grupi poput genusa i dimenzije prostora modularnih formi. Metoda je primijenjena na traženje modela glavne modularne krivulje $X_0(N)$. Dokazano je da ako je N prost broj, preslikavanje definirano s Ramanujanovom delta funkcijom Δ, potencijom Eisensteinovog reda E_4^3 i $\Delta(N\cdot)$ ima stupanj jedan odnosno ono je biracionalna ekvivalencija. U članku [34] dokazuje da preslikavanje definirano homogenim linearnim kombinacijama ovih formi daje model za $X(1)$.

U literaturi je za dobivanje modela za glavnu modularnu krivulju često korištena klasa modularnih formi dobivena pomoću Dedekindove η-funkcije, takozvani η-kvocijenti, [14], [29]. To su racionalne funkcije skaliranih Dedekindovih η-funkcija.

Povezani su s eliptičkim krivuljama [28], [12] , [40], pojmom monstrous moonshine i reprezentacijom nekih konačnih grupa, [10].

Najpoznatiji primjer η-kvocijenta je Ramanujanova delta funkcija Δ, 24-ta potencija Dedekindove η-funkcije, koja je jedinstvena normalizirana kusp forma težine 12 za $SL_2(\mathbb{Z})$ i većina knjiga o modularnim formama ima poglavlje posvećeno toj funkciji, [30] §4.4,[2] §3,[21] §5.2, [39] §1.4. Pomoću te funkcije definira se i modularna j funkcija.

Sve modularne forme na $SL_2(\mathbb{Z})$ mogu se prikazati pomoću Eisensteinovih redova E_4 i E_6, a te se forme mogu prikazati pomoću η-kvocijenata. Zaključak je da se svaka modularna forma na $SL_2(\mathbb{Z})$ može prikazati kao racionalna funkcija η-kvocijenta, ([39], Teorem 1.67). U [39], K. Ono postavlja problem klasifikacije prostora modularnih formi koji su generirani η-kvocijentima. Uvjeti da bi η-kvocjent bio modularna forma određene težine dani su u [26],[37],[38]. Poznato je da ima samo konačno mnogo η-kvocijenata koji su modularne forme neke određene težine ili nekog određenog nivoa, [4],[5],[42].

Odgovor na pitanje koje je postavio K. Ono daju J. Rouse i J. J. Webb u [42] koji nalaze dovoljne uvjete da bi se $M_k(\Gamma_0(N))$ generirao η-kvocijentima i daju primjere baza od $M_2(\Gamma_0(N))$. D. Choi u [8] dokazuje da je u slučaju grupa $\Gamma_0(N)$ genusa 0 prostor modularnih formi generiran η-kvocijentima, dok L. J. P. Kilford u [21] dokazuje da se svaka modularna forma na $\Gamma_0(N)$ može prikazati kao racionalna funkcija η-kvocijenata.

Ove modularne forme su u uskoj vezi s theta funkcijama, što je istraženo u knjizi [22]. Detaljno se proučavaju u doktorskom radu [3] i člancima [4],[5], gdje se proučava kada su η-kvocijenti ireducibilni, odnosno kada se ne mogu rastaviti na produkt drugih holomorfnih η-kvocijenata i i pokazuje se da postoji samo konačno mnogo holomorfnih η-kvocijenta dane težine odnosno danog nivoa. U [22], [3] koristi se činjenica da je svaki η-kvocijent modularna forma sa sistemom multiplikatorom za $\Gamma_0(N)$. Naime, poznato je kako se η-kvocijenti transformiraju s obzirom na djelovanje grupe $\Gamma_0(N)$ (te formule mogu se naći u knjigama [2],[30],[39] i izvedene su iz formula transformacije Dedekindove η-funkcije), te se proučava samo svojstvo holomorfnosti u kuspovima. Formulu za red u kuspu otkrio je još Ligozat u [26].

Ta je klasa funkcija pogodna jer imaju cjelobrojne koeficijente u Fourierovim razvojima, te je zbog poznavanja tranformacijske formule jednostavno izračunati Fourierove razvoje u svim kuspovima, [22].

Proučavajući meromorfne modularne forme s cjelobrojnim koeficijentima u Fourierovim razvojima koje nemaju nultočaka na gornjoj poluravnini, pokazano je da su takve funkcije samo η-kvocijenti, [23],[20],[41].

Takve funkcije daju lijepe baze prostora $M_k(\Gamma_0(N))$, u slučajevima kada ih ima dovoljno, [6]. U [42] pokazano je da su nužni uvjeti da je broj N dovoljno složen i da ne postoje eliptičke točke za $\Gamma_0(N)$. Na web stranici `users.wfu.edu/rouseja/eta` objavljene su nađene baze koje se sastoje od η-kvocijenta. G. Köhler u [22] prikazuje algoritam pomoću kojeg se mogu naći svi holomorfni η-kvocijenti za grupe $\Gamma_0(N)$ i daje puno primjera tih funkcija. U doktorskom radu [3] dane su tablice holomorfnih η-kvocijenata težina 1 i 1/2. Y. Martin u [27] daje tablicu onih η-kvocijenata koji su eigenforme za Heckeove operatore.

U programu *Sage* postoji objekt koji predstavlja η-kvocijente težine 0, one koji su modularne funkcije za $\Gamma_0(N)$ i postoji naredba koja vraća bazu slobodne abelove grupe η-kvocijenata nivoa N.

Cilj ovog rada je pomoću η-kvocijenata konstruirati preslikavanja modularne krivulje $X_0(N)$ u projektivnu ravninu te izračunati stupnjeve tih preslikavanja, stupnjeve dobivenih krivulja i njihove jednadžbe. Koristimo metodu koju je razvio G. Muić u [35].

Poglavlje 1 sadrži definicije osnovnih pojmova koje koristimo u nastavku rada; Riemannovih ploha, meromorfnih funkcija, divizora, modularnih grupa, modularnih krivulja te modularnih formi.

U Poglavlju 2 definiramo η-kvocijente, njihovu transformacijsku formulu i nužne uvjete da bi bili modularne forme za $\Gamma_0(N)$, formulu za red u kuspu. Dajemo geometrijsku interpretaciju tih uvjeta i formula.

U Poglavlju 3 bavimo se samom metodom nalaženja modela modularnih krivulja. Dajemo algoritam koji računa stupanj dobivenog modela, to jest njegovu jednadžbu te dokazujemo formulu koja veže stupanj modela i stupanj preslikavanja koje ga definira. To je preslikavanje određeno s tri linearno nezavisne modularne forme na promatranoj modularnoj grupi.

Poglavlje 4 sadrži primjenu metode opisane u Poglavlju 3 kojom konstruiramo razne modele modularnih krivulja $X_0(N)$ pomoću η-kvocijenata. Navodimo primjer modela od $X_0(p)$ iz [35], za prost broj p, koji su dobiveni pomoću funkcija E_4^3, Δ i Δ_N. Nalazimo one η-kvocijente koji su modularne forme za $\Gamma_0(p)$ težina $2, 4, 6$ i 12, za prost broj p. Kada postoje tri linearno nezavisna kvocijenta, konstruiramo preslikavanje u projektivnu ravninu i računamo stupanj. Dobivamo modele krivulja $X_0(3)$, $X_0(5)$ i $X_0(7)$ stupnja 2.

Određujemo kada je modularna forma težine 12 za $\Gamma_0(N)$ koja ima nultočku maksimalnog reda u kuspu ∞ η-kvocijent te pomoću tih kvocijenata nalazimo modele za $X_0(N)$ kada je N oblika $2^n, 3^n, 5^n, 7^n, 13^n, 2^n3^m, 2^n5^m, 2^n13^m, 3^n5^m, 2^n3^m7^r, \quad n, m, r \geq 1$.

Nalazimo modele krivulja $X_0(N)$ za 30 različitih vrijednosti broja N pomoću η-kvocijenata težine 2.

Oznake

Uz standardne matematičke oznake, u ovom radu se upotrebljavaju oznake u značenju kako slijedi.

$\sigma_0(n)$	broj djelitelja broja n
(m, n)	najveći zajednički djelitelj brojeva m i n
$\Phi(n)$	Eulerova Phi funkcija, broj pozitivnih brojeva manjih ili jednakih od n relativno prostih s n
$\Psi(n)$	Dedekindova Ψ funkcija, $\Psi(n) = \prod_{p\mid N} N(1 + 1/p)$
$\lfloor x \rfloor$	najveći cijeli broj manji od x
$\Im z$	imaginarni dio kompleksnog broja z
$\mathbb{H}$	kompleksna gornja poluravnina
$\mathbb{H}^*$	proširena kompleksna gornja poluravnina $\mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$
$\mathbb{K}$	jedinični disk $\{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert < 1\}$
$\Gamma(1)$	puna modularna grupa $SL_2(\mathbb{Z})$
$\bar{\Gamma}$	projektivizirana grupa $\Gamma/Z(\Gamma)$
Γ_z	stabilizator $\{\gamma \in \Gamma : \gamma.z = z\}$
$\nu_2(\Gamma)$	broj neekvivalentnih eliptičkih točaka reda 2 grupe Γ
$\nu_3(\Gamma)$	broj neekvivalentnih eliptičkih točaka reda 3 grupe Γ
$\nu_\infty(\Gamma)$	broj neekvivalentnih kuspova grupe Γ
$\kappa(r, \Gamma)$	širina kuspa r u grupi Γ
$X(\Gamma)$	modularna krivulja pridružena grupi Γ
$e_{\mathbf{a}}$	indeks ramifikacije točke $\mathbf{a}$ iz $X(\Gamma)$
D_f	cjelobrojni divizor pridružen modularnoj formi f
$\nu_x(f; \Gamma)$	red modularne forme f u točki x
$M_k(\Gamma)$	prostor modularnih formi težine k na Γ

$\eta(z)$	Dedekidova η funkcija
$\Delta(z)$	Ramanujanova Δ funkcija
$E_k(z)$	Eisensteinov red težine k

1 Preliminarni materijal

Ovo je poglavlje uvodno i sadrži pregled osnovnih definicija i rezultata. Objekti koji se proučavaju u ovom radu su modularne krivulje. One imaju strukturu kompaktnih Riemannovih ploha pa u §1.1 dajemo definiciju Riemannove plohe, meromorfnih funkcija, diferencijala te osnovne tvrdnje o divizorima na Riemannovim plohama. Kao literaturu koristimo [31].

Točka §1.2 daje osnovne definicije vezane za projektivne krivulje, koristimo literaturu [43], [24] i [31].

U §1.3 definirane su modularne grupe, modularne krivulje te modularne forme i osnovni pojmovi vezani za njih kao što su eliptičke točke, kuspovi, genus, divizori modularnih formi. Korištena literatura je [11], [25], [21], [46], [30], te [44]. To su redom udžbenici osnova teorije modularnih formi.

1.1 Kompaktne Riemannove plohe

Definiramo Riemannovu plohu, meromorfne fukcije, diferencijale te divizore na Riemannovim plohama. Navodimo jedan od najvažnijih teorema o divizorima, Riemann-Rochov teorem. Definiramo holomorfna preslikavanja Riemannovih ploha, njihov stupanj te navodimo Hurwitzovu formulu. Ova sekcija prati [31] i [30], §2.2.

Riemannove plohe su kompaktne 1-mnogostrukosti i one lokalno izgledaju kao $\mathbb{C}$. Neka je X povezan topološki prostor. Uređeni par (V_α, t_α), gdje je $V_\alpha \subseteq X$ otvoren podskup, a t_α homeomorfno preslikavanje s V_α na povezan otvoren skup u $\mathbb{C}$, zovemo *lokalna karta*. Skup $\{(V_\alpha, t_\alpha)\}$ je *koordinatni sistem* za X ako skupovi V_α čine pokrivač od X, te ako je za $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$ preslikavanje $t_\beta \circ t_\alpha^{-1}$ holomorfno preslikavanje s $t_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta)$ na $t_\beta(V_\alpha \cap V_\beta)$.

Skupove V_α nazivamo *koordinatne okoline*, a preslikavanja t_α *lokalne koordinate*. Za dva koordinatna sistema $\{(V_\alpha, t\alpha)\}$ i $\left\{(V'_\beta, t'_\beta)\right\}$ kažemo da su ekvivalentni ako je $\{(V_\alpha, t\alpha)\} \cup \left\{(V'_\beta, t'_\beta)\right\}$ ponovo koordinatni sistem za X.

Definicija 1.1 ***Riemannova ploha*** *X je povezan topološki prostor skupa s klasom ekvivalencije koordinatnih sistema.*

Sljedeće definiramo meromorfne funkcije na Riemannovoj plohi. Neka je f funkcija definirana na V_α i $x \in V_\alpha$. Funkcija f je *holomorfna* (meromorfna) *u točki* x ako je $f \circ t_\alpha^{-1}$ holomorfna (meromorfna) u $t_\alpha(x)$. Na isti se način definira pol odnosno nultočka meromorfne funkcije. Funkcija je *holomorfna* (meromorfna) na X ako je holomorfna (meromorfna) u svakoj točki od X.

Ako je f meromorfna u točki x, tada ona ima Laurentov razvoj oblika

$$f \circ t_\alpha^{-1}(z) = \sum_{n=l}^{\infty} a_n (z - t_\alpha(x))^n$$

gdje je $a_l \neq 0$. Broj l zovemo *red funkcije* f u točki x i označavamo s

$$\nu_x(f) = l. \tag{1.1}$$

Funkcija f ima pol ako je $\nu_x(f) < 0$, a nulu ako je $\nu_x(f) > 0$. Poznato je da meromorfne funkcije imaju konačan broj nula i polova, štoviše ako brojimo s multiplicitetima ti su brojevi jednaki ([31],§2, Propozicija 4.12.).

Egzistencija meromorfnih funkcija na kompaktnim Riemannovim plohama posljedica je Riemann-Rochovog teorema koji će biti naveden kasnije i koji promatra vektorske prostore meromorfnih funkcija s propisanim polovima i nulama. Označimo s $\mathcal{M}(X)$ polje meromorfnih funkcija na kompaktnoj Riemannovoj plohi X. Polje $\mathcal{M}(X)$ je konačno-generirano proširenje od $\mathbb{C}$ i ima stupanj transcendencije 1 ([31], §6, Propozicija 1.17.). Ako je f nekonstantna meromorfna funkcija, tada je polje $\mathbb{C}(f)$ izomorfno polju racionalnih funkcija u jednoj varijabli $\mathbb{C}(t)$. Proširenje $\mathbb{C}(f) \subset \mathcal{M}(X)$ je konačno algebarsko proširenje i vrijedi

$$[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] = \deg(\mathrm{div}_\infty(f)). \tag{1.2}$$

Dokaz ove tvrdnje može se naći u ([31],§6, Propozicija 1.21), pri čemu je $\mathrm{div}_\infty(f)$ divizor polova i bit će definiran s (1.8) u §1.1.2.

Za $m \geq 0$ definirajmo diferencijal stupnja m na Riemannovoj plohi X.

Skup $\{(\phi_\alpha, V_\alpha, t_\alpha)\}$, nazivamo *lokalni izraz diferencijala stupnja* m ako je $\{(V_\alpha, t_\alpha)\}$ koordinatni sistem od X, a ϕ_α meromorfna funkcija na V_α takva da za sve V_β za koje je $V_\alpha \cap V_\beta \neq 0$ vrijedi:

$$\phi_\alpha(x)(dt_\alpha/dt_\beta)^m(x) = \phi_\beta(x), \quad x \in V_\alpha \cap V_\beta.$$

Za dva lokalna izraza $\{(\phi_\alpha, V_\alpha, t_\alpha)\}$ i $\left\{(\phi'_\beta, V'_\beta, t'_\beta)\right\}$ kažemo da su ekvivalentni ako je $\{(\phi_\alpha, V_\alpha, t_\alpha)\} \cup \left\{(\phi'_\beta, V'_\beta, t'_\beta)\right\}$ ponovo lokalni izraz diferencijala.

Definicija 1.2 *Klasu ekvivalencije lokalnih izraza diferencijala nazivamo* ***diferencijal stupnja*** m *na* X *i pišemo*

$$\omega = \{(\phi_\alpha, V_\alpha, t_\alpha)\}.$$

Diferencijal stupnja $m = 1$ *nazivamo samo* ***diferencijal****.*

Diferencijali stupnja m na Riemannovoj plohi čine kompleksan vektorski prostor, za $m = 0$ polje.

Za diferencijal $\omega = \{(\phi_\alpha, V_\alpha, t_\alpha)\}$ i $x \in X$ postoji α takav da je $x \in V_\alpha$ pa definiramo red s

$$\nu_x(\omega) = \nu_x(\phi_\alpha) \tag{1.3}$$

Ova definicija ne ovisi o izboru lokalnog izraza za ω i u slučaju kada je X kompaktan, vrijedi $\nu_x(\omega) = 0$ osim za konačan broj točaka x.

Sada definiramo preslikavanja kompaktnih Riemannovih ploha i njihov stupanj. Neka su X_1 i X_2 kompaktne Riemannove plohe s koordinatnim sistemima $\{(V_\alpha, t_\alpha)\}$ i $\left\{(V'_\beta, t'_\beta)\right\}$. Preslikavanje $F : X_1 \to X_2$ je holomorfno preslikavanje Riemannovih ploha ako je $t'_\beta \circ F \circ t_\alpha$ holomorfno preslikavanje. Zbog kompaktnosti od X_1, svako holomorfno preslikavanje F je surjektivno. Za $x \in X_1$ definiramo *indeks ramifikacije preslikavanja* F *u točki* x s

$$e_{x,F} = \nu_x(t'_\beta \circ F). \tag{1.4}$$

Indeks ramifikacije se alternativno naziva i *multiplicitet* od F u x i označava s $\mathrm{mult}_x(F)$. Zbog kompaktnosti postoji samo konačno mnogo točaka u X_1 za koje je $e_{x,F} \neq 1$. Za $y \in X_2$, praslika $F^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_l\}$ je uvijek konačan skup i vrijednost

$$n = \sum_{i=1}^{l} e_{x_i,F} \tag{1.5}$$

je konstanta neovisna o izboru točke y i naziva se *stupanj preslikavanja* F. Preslikavanje $F : X_1 \to X_2$ inducira inkluziju funkcijskih polja $\mathcal{M}(X_2) \to \mathcal{M}(X_1)$, pri čemu je meromorfnoj funkciji f na X_2 pridružena meromorfna funkcija $F^*(f) = f \circ F$ na X_1, odnosno $\mathcal{M}(X_2)$ je potpolje polja $\mathcal{M}(X_1)$. Stupanj proširenja polja je točno jednak stupnju preslikavanja. U literaturi je ovo često definicija stupnja holomorfnog preslikavanja. Diskusija o stupnju preslikavanja i ekvivalencija ovih definicija može se naći u [35],(Lema 3-2 tvrdi da je praslika $F^{-1}(y)$ konačan skup, Lema 3-4 pokazuje da je praslika uvijek istog kardinaliteta, Lema 3-5 dokazuje ekvivalenciju definicija).

Označimo genuse ploha X_1 i X_2 s g_1 i g_2. Poznata je Hurwitzova formula ([31],§2., Teorem 4.16.):

$$2g_1 - 2 = n(2g_2 - 2) + \sum_{x \in X_1} (e_{x,F} - 1). \tag{1.6}$$

1.1.1 Divizori na kompaktnim Riemannovim plohama

Neka je X Riemannova ploha i $D : X \to \mathbb{Z}$ funkcija. Definiramo *nosač funkcije* D s

$$\operatorname{supp}(D) = \{x \in X : D(x) \neq 0\}.$$

Definicija 1.3 ***Divizor*** *na* X *je funkcija* $D : X \to \mathbb{Z}$ *čiji nosač je diskretan podskup od* X.

Divizori čine grupu s obzirom na zbrajanje po točkama i ta grupa je slobodna abelova grupa generirana svim točkama iz X. Divizore uobičajeno zapisujemo u obliku zbroja

$$D = \sum_{x \in X} D(x)x.$$

Za divizor D kažemo da je *pozitivan* ako je $D(x) \geq 0$ za sve x i pišemo $D \geq 0$.

Ako je X kompaktan, tada svaki divizor ima konačan nosač pa možemo definirati njegov stupanj.

Definicija 1.4 ***Stupanj divizora*** D *na kompaktnoj Riemannovoj plohi* X *jednak je*

$$\deg D = \sum_{x \in X} D(x). \tag{1.7}$$

Pretpostavimo da je X kompaktna Riemannova ploha.

Neka je $f \in \mathcal{M}(X)$ ne-nul meromorfna funkcija. *Divizor od* f je dan s

$$\operatorname{div}(f) = \sum_{x \in X} \nu_x(f)x.$$

Divizore meromorfnih funkcija zovemo *glavni divizori.* Definiramo divizor polova s

$$\mathrm{div}_\infty(f) = \sum_{\nu_x(f)<0} -\nu_x(f)x. \tag{1.8}$$

Budući da f ima konačan broj polova i nula, $\mathrm{div}(f)$ je dobro definiran te vrijedi

$$\deg(\mathrm{div}(f)) = 0. \tag{1.9}$$

Također, lako se vidi da za meromorfne funkcije $f, g \in \mathcal{M}(X)$ vrijedi:

1. $\mathrm{div}(fg) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(g)$
2. $\mathrm{div}(f/g) = \mathrm{div}(f) - \mathrm{div}(g)$
3. $\mathrm{div}(1/f) = -\mathrm{div}(f)$
4. $\mathrm{div}(f+g) \geq \min\{\mathrm{div}(f), \mathrm{div}(g)\}$

Neka je $\omega \neq 0$ diferencijal stupnja m. Koristeći (1.3) definiramo *divizor diferencijala* s

$$\mathrm{div}(\omega) = \sum_{x\in X} \nu_x(\omega)x. \tag{1.10}$$

Navest ćemo, bez dokaza, vrlo važan teorem iz teorije Riemannovih ploha i algebarskih krivulja. Za proizvoljan divizor D definiramo sljedeći skup:

$$L(D) = \{f \in \mathcal{M}(X) : \mathrm{div}(f) + D \geq 0\}. \tag{1.11}$$

Ovaj skup sadrži sve meromorfne funkcije čiji polovi su omeđeni s divizorom D. Poznato je da je $L(D)$ konačno-dimenzionalan vektorski prostor nad $\mathbb{C}$, te označimo njegovu dimenziju s

$$l(D) = \dim_{\mathbb{C}} L(D).$$

Navodimo verziju Riemann-Rochovog teorema iz ([31],§6, Teorem 3.11):

Teorem 1.5 (Riemann-Roch) *Neka je X kompaktna Riemannova ploha genusa g i ω ne-nul diferencijal na X. Tada za svaki divizor D na X vrijedi:*

$$l(D) = \deg(D) - g + 1 + l(div(\omega) + D). \tag{1.12}$$

Ovaj teorem ima sljedeću posljedicu ([30], Korolar 2.2.2.):

Korolar 1.6 *Ako je ω ne-nul diferencijal stupnja m na kompaktnoj Riemannovoj plohi X genusa g, tada je stupanj njegovog divizora jednak*

$$\deg(div(\omega)) = 2m(g-1).$$

1.1.2 Kompaktne Riemannove plohe kao algebarski objekti

Iz Riemann-Rochovog teorema slijedi da je svaka kompaktna Riemannova ploha algebarska krivulja ([31], §7., Propozicija 1.1.), a kao takva se može holomorfno uložiti u neki projektivni prostor ([31],§7., Propozicija 1.3.).

No kompaktna Riemannova ploha X ima kanonsku strukturu algebarskog skupa i bez ulaganja u projektivni prostor. Na Zariski otvorenom podskupu U (komplementu konačnog skupa) definiramo da su regularne funkcije one meromorfne funkcije na X koje nemaju polova na U. Time je definiran prsten regularnih funkcija na X. Polje racionalnih funkcija na X kao projektivnog skupa jednako je polju meromorfnih funkcija na kompaktnoj Riemannovoj plohi X.

1.2 Ravninske projektivne krivulje

Neka je $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ kompleksna projektivna ravnina.

Definicija 1.7 *Skup $C \subseteq \mathbb{P}^2$ je **projektivna krivulja** ako postoji nekonstantni homogeni polinom $F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$ takav da nultočke polinoma F čine skup C, odnosno*

$$C = \left\{P \in \mathbb{P}^2 : F(P) = 0\right\}. \tag{1.13}$$

Polinom najmanjeg stupnja za koji vrijedi (1.13) zove se *minimalni polinom* od C i jedinstven je do na množenje konstantom. Taj je polinom generator ideala $I(C) \subseteq \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]$ generiranog svim homogenim polinomima koji se poništavaju na C ([24], Teorem 2.12). *Stupanj krivulje* $\deg C$ definiran je kao stupanj minimalnog polinoma koji ju definira. Krivulje stupnja 1 su pravci u $\mathbb{P}^2$.

Krivulja C je *ireducibilna* ukoliko iz $C = C_1 \cup C_2$ slijedi $C = C_1$ ili $C = C_2$. Krivulja C je ireducibilna ako i samo ako je $I(C)$ prost ideal, a to vrijedi ako i samo ako je minimalni polinom krivulje ireducibilan polinom ([24], Korolar 2.13).

Polje racionalnih funkcija krivulje C je transcendentalno proširenje polja $\mathbb{C}$ stupnja 1, ono je konačno algebarsko proširenje polja racionalnih funkcija u jednoj varijabli $\mathbb{C}(t)$, ([24], Korolar 4.6).

Točka $P \in C$ je *singularna* ako je

$$\frac{\partial F}{\partial X_0}(P) = \frac{\partial F}{\partial X_1}(P) = \frac{\partial F}{\partial X_2}(P) = 0.$$

Poznati Bézout-ov teorem ([43], §1.6, [24], Teorem 5.7) govori nam o broju točaka u presjeku dvije krivulje. Ako brojimo točke presjeka skupa s multiplicitetima, taj zbroj je jednak umnošku stupnjeva krivulja. Posebno, ako imamo neku krivulju C i pravac koji nije sadržan u njoj, tada taj pravac sječe krivulju C u $\deg C$ točaka.

1.3 Modularne grupe

Grupu $\Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z})$ cjelobrojnih 2×2 matrica determinante 1 nazivamo *puna modularna grupa*.

Definicija 1.8 *Podgrupu od $SL_2(\mathbb{Z})$ konačnog indeksa nazivamo* ***modularna grupa****.*

Svaka modularna grupa je diskretna podrupa grupe $SL_2(\mathbb{R})$ pa je primjer Fuchsove grupe. Za prirodni broj N definiramo podgrupu

$$\Gamma(N) = \left\{ \gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) : \gamma \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\},$$

koju nazivamo *glavna kongruencijska podgrupa*. Grupa $\Gamma(N)$ je normalna podgrupa od $SL_2(\mathbb{Z})$ jer je jezgra homomorfizma $\lambda_N : SL_2(\mathbb{Z}) \to SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, $\lambda_N(\gamma) = \gamma \pmod{N}$. Homomorfizam λ_N inducira izomorfizam

$$SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma(N) \simeq SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}),$$

pa prebrojavanjem skupa $SL_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ dobivamo ([30], Teorem 4.2.4)

$$[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] = N^3 \prod_{p|N} \left(1 - 1/p^2\right). \tag{1.14}$$

Svaka podgrupa od $SL_2(\mathbb{Z})$ koja sadrži $\Gamma(N)$ za neki N naziva se *kongruencijska podgrupa*. Najmanji takav N nazivamo *nivo* kongruencijske podgrupe. Od posebne su važnosti sljedeće kongruencijske podgrupe:

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) : \gamma \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{N} \right\},$$
$$\Gamma_1(N) = \left\{ \gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) : \gamma \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\},$$

koje nazivamo *modularne grupe Heckeovog tipa*.

Očito je da za svaki N vrijedi

$$\Gamma(N) \subseteq \Gamma_1(N) \subseteq \Gamma_0(N) \subseteq SL_2(\mathbb{Z}).$$

Također, vrijedi

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \Gamma(1) = \Gamma_1(1) = \Gamma_0(1).$$

Ako $M|N$, tada je

$$\Gamma(N) \subset \Gamma(M), \quad \Gamma_0(N) \subset \Gamma_0(M), \quad \Gamma_1(N) \subset \Gamma_1(M).$$

Sve su navedene podgrupe modularne grupe, to jest podgrupe su konačnog indeksa.

Grupa $\Gamma(N)$ je jezgra surjektivnog preslikavanja

$$\Gamma_1(N) \to \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto b \pmod{N}$$

pa zaključujemo da je $\Gamma(N)$ normalna podgrupa od $\Gamma_1(N)$ i

$$[\Gamma_1(N) : \Gamma(N)] = N. \tag{1.15}$$

Koristeći (1.14) dobivamo

$$[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_1(N)] = N^2 \prod_{p|N} \left(1 - 1/p^2\right). \tag{1.16}$$

Slično, grupa $\Gamma_1(N)$ je jezgra surjektivnog preslikavanja

$$\Gamma_0(N) \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto d \pmod{N}$$

pa zaključujemo da je $\Gamma_1(N)$ normalna podgrupa od $\Gamma_0(N)$ i

$$[\Gamma_0(N) : \Gamma_1(N)] = \Phi(N). \tag{1.17}$$

Koristeći (1.16) zaključujemo

$$[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)] = N \prod_{p|N} (1 + 1/p) = \Psi(N). \tag{1.18}$$

Modularna grupa Γ djeluje na kompleksnu gornju poluravninu $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ linearnim frakcionalnim transformacijama

$$\gamma.z = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma, \quad z \in \mathbb{H}, \tag{1.19}$$

čime je svakom elementu grupe Γ pridružen automorfizam gornje poluravnine. To vrijedi jer

$$\Im(\gamma z) = \frac{\Im(z)}{|cz+d|^2} > 0.$$

Napomena 1.9 *Očito je da γ i $-\gamma$ daju istu linearnu frakcionalnu transformaciju, pa proučavanje djelovanja gledamo za projektivizirane grupe*

$$\bar{\Gamma} = \Gamma / Z(\Gamma),$$

pri čemu je $Z(\Gamma) = \Gamma \cap \{\pm 1\}$. Ako je $-1 \in \Gamma$, tada je $\bar{\Gamma}$ izomorfna podgrupi od Γ indeksa 2, a u slučaju $-1 \notin \Gamma$ vrijedi $\bar{\Gamma} = \Gamma$. Što se indeksa tiče, ako je $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$ i $-1 \notin \Gamma_1, -1 \in \Gamma_2$ tada je

$$\left[\bar{\Gamma}_2 : \bar{\Gamma}_1\right] = \frac{1}{2}\left[\Gamma_2 : \Gamma_1\right],$$

u svim drugim slučajevima je $\left[\bar{\Gamma}_2 : \bar{\Gamma}_1\right] = [\Gamma_2 : \Gamma_1]$.

Za prethodno definirane kongruencijske podgrupe vrijedi

$$\begin{aligned} &-1 \in \Gamma_0(N), \quad \forall N, \\ &-1 \notin \Gamma(N), \quad N > 2, \\ &-1 \notin \Gamma_1(N), \quad N > 2. \end{aligned}$$

1.3.1 Eliptičke točke

Neka je Γ modularna grupa. Točka $z \in \mathbb{H}$ je *eliptička točka* za grupu Γ ako je fiksna točka u $\mathbb{H}$ nekog elementa iz Γ, to jest ako postoji $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ takav da je $\alpha.z = z$. U tom slučaju α zovemo eliptički element i vrijedi $(a+d)^2 < 4$.

Stabilizator eliptičke točke, skup $\Gamma_z = \{\gamma \in \Gamma : \gamma.z = z\}$, je konačna ciklička grupa, ([30], Teorem 1.5.4(1)). Red grupe Γ_z zovemo *red eliptičke točke z*.

Grupa $\Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z})$ ima eliptičke točke reda 2 koje su sve međusobno ekvivalentne i ekvivalentne točki $i = \sqrt{-1}$ te eliptičke točke reda 3 sve međusobno ekvivalentne i ekvivalentne točki $\omega = e^{\pi i/3}$ ([30], Teorem 4.1.3(1)).

Ako je Γ modularna grupa, tada su eliptičke točke od Γ reda 2 ili 3 budući da je Γ_z podgrupa od $\Gamma(1)_z$. Označimo s $\nu_2(\Gamma), \nu_3(\Gamma)$ broj neekvivalentnih eliptičkih točaka reda 2 odnosno 3 grupe Γ. Iz sljedećih teorema ([30], Teorem 4.2.7, Teorem 4.2.9, Teorem 4.2.10) imamo:

Teorem 1.10 *Za $N \geq 2$ vrijedi:*

(i) $$\nu_2(\Gamma_0(N)) = \begin{cases} 0, & 4 \mid N \\ \prod\limits_{p \mid N} \left(1 + \left(\frac{-4}{p}\right)\right), & 4 \nmid N \end{cases}$$

(ii) $$\nu_3(\Gamma_0(N)) = \begin{cases} 0, & 9 \mid N \\ \prod\limits_{p \mid N} \left(1 + \left(\frac{-3}{p}\right)\right), & 9 \nmid N \end{cases}$$

(iii) $\nu_2(\Gamma(N)) = \nu_3(\Gamma(N)) = 0$

(iv) $\nu_2(\Gamma_1(N)) = \nu_3(\Gamma_1(N)) = 0$ *za* $N \geq 4$*, dok za* $N = 2, 3$ *vrijedi* $\bar{\Gamma}_1(N) = \bar{\Gamma}_0(N)$*,*

pri čemu je $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ *Legendreov ostatak modulo p koji je definiran s*

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0, & a \equiv 0 \pmod p \\ 1, & \text{ako je } a \text{ kvadratni ostatak modulo } p \text{ i } a \not\equiv 0 \pmod p \\ -1, & \text{ako } a \text{ nije kvadratni ostatak modulo } p. \end{cases}$$

1.3.2 Kuspovi

Djelovanje modularne grupe Γ linearnim frakcionalnim transformacijama dano s (1.19) možemo proširiti na skup $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$,

$$\gamma.x = \frac{ax+b}{cx+d} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma, \quad x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Točka $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ je *kusp* grupe Γ ako je jedinstvena fiksna točka nekog elementa iz Γ, to jest ako postoji $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ takav da je $\alpha.x = x$. Element α zovemo parabolički element i vrijedi $(a+d)^2 = 4$. Ako $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ ima dvije fiksne točke na $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, tada kažemo da je α hiperbolički element i vrijedi $(a+d)^2 > 4$.

Ako je x kusp od $\Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z})$, to jest ako postoji $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma(1)$ takav da je $\alpha.x = x$, tada je x dvostruko rješenje kvadratne jednadžbe s cjelobrojnim koeficijentima $cx^2 + (d-a)x - b = 0$ pa je nužno racionalni broj.

Neka je $a/c \in \mathbb{Q}$, gdje su a i c relativno prosti, kusp od $\Gamma(1)$. Uzmimo $a', c' \in \mathbb{Z}$ takve da je $aa' + cc' = 1$. Za $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} a' & c' \\ -c & a \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma(1)$ vrijedi

$$\sigma.\frac{a}{c} = \infty \tag{1.20}$$

i imamo ekivivalenciju kuspa a/c i kuspa ∞.

Dakle, skup kuspova od $\Gamma(1)$ jednak je $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ i svi su međusobno ekvivalentni ([30], Teorem 4.1.3.(2)).

Označimo skup kuspova od Γ s C_Γ. Ako je Γ modularna grupa, tada je

$$C_\Gamma = C_{\Gamma(1)} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}. \tag{1.21}$$

Dalje, svaka kongruencijska podgrupa nivoa N sadrži matricu $\left(\begin{smallmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ kojoj je ∞ fiksna točka pa zaključujemo da je ∞ kusp svake kongruencijske podgrupe. Ostali kuspovi kongruencijske podgrupe su oblika $\sigma.\infty$ za $\sigma \in \Gamma(1)$.

Napomena 1.11 *Ako je Γ podgrupa od $\Gamma(1)$ konačnog indeksa, tada ona ima isti skup kuspova, no pitanje je koji su od njih međusobno ekvivalentni, to jest koliko klasa ekvivalencije imamo za Γ. Ako je $\Gamma' \subseteq \Gamma$ normalna podgrupa konačnog indeksa, tada je broj $\Gamma'-$neekvivalentnih kuspova koji su $\Gamma-$ekvivalentni jednak*

$$\left[\bar{\Gamma} : \bar{\Gamma}'\right] / \left[\bar{\Gamma}_x : \bar{\Gamma}'_x\right].$$

Skup klasa neekvivalentnih kuspova je skup $\Gamma \setminus C_\Gamma$. Preslikavanje $\alpha \mapsto \alpha.\infty$ za $\alpha \in \Gamma(1)$ inducira bijekciju s $\Gamma \setminus \Gamma(1)/\Gamma(1)_\infty$ na $\Gamma \setminus C_\Gamma$.

Označimo s M_N skup elemenata reda N u $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Za $m \in \mathbb{Z}$ označimo $\bar{m} = m \pmod N$. Za $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vrijedi

$$(\bar{m}, \bar{n}) \in M_N \iff (m, n, N) = 1.$$

Preslikavanje $\Gamma(1) \to M_N$ dano s

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (\bar{a}, \bar{c}) \tag{1.22}$$

je surjektivno. Definiramo dvije relacije ekvivalencije na M_N:

$$(\bar{a}, \bar{c}) \sim (\bar{a}', \bar{c}') \iff (\bar{a}', \bar{c}') = \pm(\bar{m}\bar{a} + \bar{n}\bar{c}, \bar{m}^{-1}\bar{c}),$$
$$(\bar{a}, \bar{c}) \sim' (\bar{a}', \bar{c}') \iff (\bar{a}', \bar{c}') = (\bar{a} + \bar{n}\bar{c}, \bar{c}),$$

pri čemu je $\bar{m} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*, \bar{n} \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Neka je $N > 1$. Preslikavanje (1.22) inducira sljedeće bijekcije:

$$\Gamma_0(N) \setminus \Gamma(1)/\Gamma(1)_\infty \to M_N/\sim$$
$$\Gamma_1(N) \setminus \Gamma(1)/\Gamma(1)_\infty \to M_N/\sim'$$
$$\Gamma(N) \setminus \Gamma(1)/\Gamma(1)_\infty \to M_N/\{\pm 1\}.$$

Dakle, kao skupove reprezenatanta klasa neekvivalentnih kuspova grupa $\Gamma_0(N)$,$\Gamma_1(N)$ i $\Gamma(N)$ možemo uzeti redom skupove:

$$C_0(N) = \left\{\frac{a}{c} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\} : (a,c) = 1, (\bar{a}, \bar{c}) \in M_N/\sim\right\} \tag{1.23}$$
$$C_1(N) = \left\{\frac{a}{c} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\} : (a,c) = 1, (\bar{a}, \bar{c}) \in M_N/\sim'\right\}$$
$$C(N) = \left\{\frac{a}{c} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\} : (a,c) = 1, (\bar{a}, \bar{c}) \in M_N/\{\pm 1\}\right\}$$

S $\nu_\infty(\Gamma)$ označimo broj neekvivalentnih kuspova grupe Γ. Koristeći teoreme ([30], Teorem 4.2.7, Teorem 4.2.9, Teorem 4.2.10) dobivamo

Teorem 1.12 *Za $N \geq 2$ vrijedi:*

(i) $\nu_\infty(\Gamma_0(N)) = \sum_{0<d|N} \Phi((d, N/d))$

(ii) $$\nu_\infty(\Gamma_1(N)) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{0<d|N} \Phi(d)\Phi(N/d), & N \geq 5 \\ 3, & N = 4 \end{cases}$$

(iii) $$\nu_\infty(\Gamma(N)) = \begin{cases} \frac{1}{2} N^2 \prod_{p|N} (1 - 1/p^2), & N \geq 3 \\ 3, & N = 2 \end{cases}$$

Kuspovi od $\Gamma_0(N)$

Za skup reprezentanata neekvivalentnih kuspova na $\Gamma_0(N)$ možemo uzeti skup racionalnih brojeva a/d, $(a,d) = 1$ takvih da je d djelitelj broja N, a broj $a \in (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^*$ za $k = (d, N/d)$. Taj ćemo skup označiti s $\mathcal{C}_N$ i koristiti u primjeni,

$$\mathcal{C}_N = \left\{\frac{a}{d} : d|N, (a,d) = 1, a \in (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^* \text{ za } k = (d, N/d)\right\}. \tag{1.24}$$

Dakle, postoji $\Phi((d, N/d))$ kuspova koji su reprezentirani racionalnim brojem s nazivnikom d.

U $\Gamma_0(N)$ uvijek postoje barem dva kuspa, kusp ∞ koji je u $\mathcal{C}_N$ predstavljen jedinstvenim razlomakom s nazivnikom N te kusp $\mathbf{o}$ koji je reprezentiran jedinstvenim razlomkom s nazivnikom 1.

Širina kuspa

Ako je Γ podgrupa od $\Gamma(1)$ konačnog indeksa i $x = a/c$ kusp od Γ, tada je po ([30], Teorem 1.5.4(2))

$$\Gamma_x/Z(\Gamma) \simeq \mathbb{Z}$$

i za $\sigma \in \Gamma(1)$, $\sigma.a/c = \infty$ vrijedi

$$\{\pm 1\}\, \sigma\Gamma_x\sigma^{-1} = \{\pm 1\}\, \Gamma_\infty = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & lh \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : l \in \mathbb{Z} \right\} \tag{1.25}$$

za neki broj $h > 0$ koji nazivamo *širina kuspa* x i označavamo ga s $\kappa(x, \Gamma)$. Na primjer, kako je

$$\Gamma(1)_\infty = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

zaključujemo da je širina kuspa ∞ u $\Gamma(1)$ jednaka $\kappa(\infty, \Gamma(1)) = 1$.

Izračunajmo širine kuspova kongruencijskih podgrupa $\Gamma_0(N), \Gamma_1(N)$ i $\Gamma(N)$.

Neka je $x = a/c \in C_{\Gamma(1)}$ i $\sigma \in \Gamma(1)$, $\sigma.a/c = \infty$. Tada elementarnim računom vidimo da je

$$\Gamma(1)_x = \left\{ \pm \begin{pmatrix} \varepsilon - acl & a^2 l \\ -c^2 l & \varepsilon + acl \end{pmatrix} : \varepsilon = \pm 1, l \in \mathbb{Z} \right\}. \tag{1.26}$$

Za podgrupu Γ imamo

$$\Gamma_x = \Gamma(1)_x \cap \Gamma. \tag{1.27}$$

Neka je $\Gamma = \Gamma_0(N)$. Koristeći (1.26) i (1.27) dobivamo:

$$\Gamma_0(N)_x = \left\{ \pm \begin{pmatrix} \varepsilon - acl & a^2 l \\ -c^2 l & \varepsilon + acl \end{pmatrix} : c^2 l | N, \varepsilon = \pm 1, l \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Iz (1.25) vidimo da je širina kuspa jednaka najmanjem broju l za koji vrijedi $c^2 l | N$, a to je

$$\kappa\left(\frac{a}{c}, \Gamma_0(N)\right) = \frac{N}{(c^2, N)} = \frac{N}{c(c, N/c)} \tag{1.28}$$

i posebno vidimo da u slučaju grupe $\Gamma_0(N)$ širina kuspa ovisi samo o nazivniku kuspa.

Grupa $\Gamma = \Gamma_1(N)$ ne sadrži -1 tako da iz (1.26) i (1.27) dobivamo

$$\Gamma_1(N)_x = \left\{ \begin{pmatrix} -acl & a^2 l \\ -c^2 l & acl \end{pmatrix} : c^2 l | N, \pm acl | (N-1), l \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Tražimo najmanji l za koji vrijedi

$$c^2 l | N, \quad \pm acl | (N-1),$$

a to je

$$\kappa\left(\frac{a}{c}, \Gamma_1(N)\right) = \frac{N(N-1)^2}{(c^2, N)(a, N-1)(c, N-1)}. \tag{1.29}$$

Isti postupak primjenimo na grupu $\Gamma(N)$ i dobivamo da je širina kuspa uvijek jednaka N,

$$\kappa\left(\frac{a}{c}, \Gamma(N)\right) = N, \tag{1.30}$$

posebno imamo

$$\Gamma(N)_\infty = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

1.4 Modularne krivulje

Neka je Γ modularna grupa. Skup orbita $\Gamma \setminus \mathbb{H}$ djelovanja modularne grupe linarnim frakcionalnim transformacijama na gornju poluravninu označavamo $Y(\Gamma)$ i nazivamo *modularna krivulja.* Skup $Y(\Gamma)$ kompaktificiramo dodavanjem kuspova grupe Γ i time dobivamo kompaktnu Riemannovu plohu koju označavamo s $X(\Gamma)$,

$$X(\Gamma) = Y(\Gamma) \cup \Gamma \setminus (\mathbb{Q} \cup \{\infty\}) = \Gamma \setminus \mathbb{H}^* \tag{1.31}$$

pri čemu je $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ proširena gornja poluravnina.

Definicija 1.13 *Skup $X(\Gamma)$ nazivamo* ***modularna krivulja****.*

Na skupu $X(\Gamma)$ definirana je kvocjentna topologija - skup $U \subseteq \Gamma \setminus \mathbb{H}$ je otvoren ako i samo ako je skup $\pi^{-1}(U)$ otvoren u $\mathbb{H}^*$, pri čemu je $\pi : \mathbb{H}^* \to \Gamma \setminus \mathbb{H}$ kvocjentno preslikavanje, $\pi(z) = \Gamma.z$. Okoline točke ∞ u $\mathbb{H}^*$ su skupovi $\{z \in \mathbb{H} : \Im z > l\}$, dok su okoline racionalnog broj x otvoreni krugovi u $\mathbb{H}$ koji tangiraju realnu os u točki x. Na skupu $X(\Gamma)$ definiramo kompleksnu strukturu i skup $X(\Gamma)$ je kompaktna Riemannova ploha. Definicije koordinatnih okolina i lokalnih koordinata mogu se naći u [30], §1.8. Modularne krivulje pridružene grupama $\Gamma(1)$, $\Gamma(N)$, $\Gamma_0(N)$ i $\Gamma_1(N)$ označavamo redom $X(1)$, $X(N)$, $X_0(N)$ i $X_1(N)$.

Neka je $X(\Gamma)$ modularna krivulja i $\mathbf{a}_z = \pi(z) = \Gamma.z$ točka u $X(\Gamma)$. Kažemo da je $\mathbf{a}_z$ *eliptička točka* odnosno *kusp* od $X(\Gamma)$ ako je z eliptička točka odnosno kusp od Γ. Ako $\mathbf{a}_z$ nije niti eliptička točka niti kusp, tada kažemo da je $\mathbf{a}_z$ *obična točka.*

Broj

$$e_{\mathbf{a}_z} = |\bar{\Gamma}_z| \tag{1.32}$$

ne ovisi o izboru točke z, naziva se *indeks ramifikacije* od $\mathbf{a}_z$ i određuje tip točke. Ako je $e_{\mathbf{a}_z} = 1$, tada je $\mathbf{a}_z$ obična točka, ako je $e_{\mathbf{a}_z} = \infty$, tada je $\mathbf{a}_z$ kusp.

Neka su $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$ modularne grupe. Inkluzija grupa daje preslikavanje na kvocjentnim prostorima $F : X(\Gamma_1) \to X(\Gamma_2)$, $F(\Gamma_1.z) = \Gamma_2.z$. Ako su $z, z' \in \mathbb{H}^*$ iz iste orbite, to jest $\Gamma_1.z = \Gamma_1.z'$, tada postoji $\gamma \in \Gamma_1$ takav da je $z' = \gamma.z$ pa je $\Gamma_2.z = \Gamma_2.z'$. Dakle, preslikavanje F je dobro definirano. Označimo s π_1 odnosno π_2 kvocjentna preslikavanja $\pi_i : \mathbb{H}^* \to X(\Gamma_i)$, $i = 1, 2$. Vrijedi $F \circ \pi_1 = \pi_2$, odnosno sljedeći dijagram komutira

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^* & \longrightarrow & \mathbb{H}^* \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ X(\Gamma_1) & \xrightarrow[F]{} & X(\Gamma_2) \end{array}$$

Preslikavanje F je nekonstantno holomorfno preslikavanje kompaktnih Riemannovih ploha pa je surjekcija $X(\Gamma_1) \twoheadrightarrow X(\Gamma_2)$ i vrijedi sljedeće ([45], Propozicija 1.37):

Lema 1.14 *Neka su $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$ modularne grupe. Tada postoji prirodno preslikavanje kompaktnih Riemannovih ploha $X(\Gamma_1) \twoheadrightarrow X(\Gamma_2)$ stupnja $\left[\bar{\Gamma}_2 : \bar{\Gamma}_1\right]$.*

Dokaz. Računamo stupanj preslikavanja $F : X(\Gamma_1) \to X(\Gamma_2)$. Vrijedi

$$F^{-1}(\Gamma_2.z) = \left\{\Gamma_1\gamma_j'.z : j = 1, ..., n'\right\},$$

pri čemu su elementi γ_j' generatori od

$$\bar{\Gamma}_1 \setminus \bar{\Gamma}_2 = \left\{\bar{\Gamma}_1\gamma_j' : j = 1, ..., n'\right\}.$$

Dakle, stupanj preslikavanja F je jednak indeksu $\left[\bar{\Gamma_2} : \bar{\Gamma_1}\right]$. Izračunajmo indeks ramifikacije u točki $\mathbf{a} \in X(\Gamma_2)$. Neka je $z \in \mathbb{H}^*$ takav da je $\pi_2(z) = \mathbf{a}$ i $F^{-1}(\mathbf{a}) = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ te neka je $w_k \in \mathbb{H}^*$ takav da vrijedi $\mathbf{a}_k = \pi_1(w_k)$. Tada po definiciji indeksa ramifikacije (1.4) imamo

$$e_{w_k} = \left[\bar{\Gamma}_{2w_k} : \bar{\Gamma}_{1w_k}\right].$$

Indeks ramifikacije od F u točki $\mathbf{a} = \Gamma_2.z$ je različit od 1 samo u dva slučaja. Kada je $\mathbf{a}$ kusp od $X(\Gamma_2)$, tada je indeks ramifikacije od F u točki $\mathbf{a}$ jednak broju Γ_1-neekvivalentnih kuspova koji su Γ_2-ekvivalentni kuspu z. Drugi slučaj je slučaj eliptičke točke $\mathbf{a} = \Gamma_2.z$, kada je z eliptička točka za Γ_2 koja nije eliptička točka s obzirom na Γ_1. Tada je indeks ramifikacije preslikavanja jednak redu eliptičke točke, to jest jednak je indeksu ramifikacije točke $\mathbf{a}$ u $X(\Gamma_1)$. $\square$

Promatrajući preslikavanje $X(\Gamma) \twoheadrightarrow X(1)$ za modularnu grupu Γ, iz Hurwitzove formule (1.6) slijedi ([30], Teorem 4.2.11):

Teorem 1.15 *Neka je Γ modularna grupa i $\mu = \left[\bar{\Gamma}(1) : \bar{\Gamma}\right]$. Tada je genus g_Γ Riemanove plohe $X(\Gamma)$ jednak:*

$$g_\Gamma = 1 + \frac{\mu}{12} - \frac{\nu_2(\Gamma)}{4} - \frac{\nu_3(\Gamma)}{3} - \frac{\nu_\infty(\Gamma)}{2}. \tag{1.33}$$

Koristeći formule iz Teorema 1.10 i Teorema 1.12 te Teorem 1.15 možemo izračunati genuse modularnih krivulja $X(N)$, $X_0(N)$, $X_1(N)$. Posebno, krivulja $X(1)$ ima genus nula.

1.5 Modularne forme

Neka k cijeli broj i $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ meromorfna funkcija. Za $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$ definiramo *slash operator* $|_k\gamma$ s

$$(f|_k\gamma)(z) = (cz + d)^{-k} f(\gamma.z).$$

Kažemo da je meromorfna funkcija f *slabo modularna težine* k za modularnu grupu Γ ako je $f|_k\gamma = f$ za sve $\gamma \in \Gamma$, odnosno vrijedi

$$f(\gamma.z) = (cz + d)^k f(z), \quad \forall \gamma \in \Gamma. \tag{1.34}$$

Lema 1.16 *Za $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ označimo $j(\gamma, z) = cz + d$. Neka je $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ meromorfna funkcija. Tada vrijedi:*

(i) $j(\gamma\gamma', z) = j(\gamma, \gamma'.z)j(\gamma', z)$

(ii) $(f|_k\gamma)|_k\gamma' = f|_k(\gamma\gamma')$

(iii) Ako je f slabo modularna težine k za modularnu grupu Γ, tada je $f|_k\gamma$ slabo modularna težine k za $\gamma^{-1}\Gamma\gamma$.

Dokaz.

(i) Označimo $\gamma' = \left(\begin{smallmatrix} e & f \\ g & h \end{smallmatrix}\right)$ i računamo

$$\begin{aligned} j(\gamma, \gamma'.z)j(\gamma', z) &= \left(c\frac{ez+f}{gz+h} + d\right)(gz+h) \\ &= cez + cf + dgz + dh = (ce+dg)z + cf + dh \\ &= j(\gamma\gamma', z) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} (f|_k(\gamma\gamma'))(z) &= j(\gamma\gamma', z)^{-k} f((\gamma\gamma').z) \\ &\overset{(i)}{=} j(\gamma', z)^{-k} j(\gamma, \gamma'.z)^{-k} f((\gamma\gamma').z) \\ &= j(\gamma', z)^{-k} (f|_k\gamma)(\gamma'.z) \\ &= ((f|_k\gamma)|_k\gamma')(z) \end{aligned}$$

(iii) Neka je $\alpha \in \Gamma$.

$$(f|_k\gamma)|_k(\gamma^{-1}\alpha\gamma) \overset{(ii)}{=} f|_k(\alpha\gamma) \overset{(ii)}{=} (f|_k\alpha)|_k\gamma = f|_k\gamma.$$

□

Neka je Γ modularna grupa i $\mathbb{K} = \{q \in \mathbb{C} : |q| < 1\}$ otvoreni jedinični disk u $\mathbb{C}$. Definirajmo holomorfnost funkcije $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ u kuspu $x \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Uzmimo $\sigma \in SL_2(\mathbb{R})$ takav da je $\sigma.x = \infty$. Tada imamo

$$\sigma\Gamma_x\sigma^{-1} \cdot \{\pm 1\} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^l : l \in \mathbb{Z} \right\}, \quad h > 0.$$

Ako je funkcija f slabo modularna težine k u odnosu na Γ, tada je po Lemi 1.16(iii) $f|_k\sigma^{-1}$ slabo modularna u odnosu na grupu $\sigma\Gamma\sigma^{-1}$ pa imamo

$$(f|_k\sigma^{-1})|_k \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f|_k\sigma^{-1},$$

odnosno

$$(f|_k\sigma^{-1})(z+h) = (f|_k\sigma^{-1})(z).$$

Dakle, slabo modularna funkcija je periodična pa postoji funkcija g na $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ takva da je

$$(f|_k\sigma^{-1})(z) = g(e^{2\pi iz/h}).$$

Ako je f meromorfna, tada je i g meromorfna. Neka g ima Laurentov razvoj oko 0 oblika $g(w) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n w^n$ za $w = e^{2\pi iz/h} \in \mathbb{K}$, pri čemu je $a_N \neq 0$. Tada je *Fourierov razvoj od f u kuspu x* oblika

$$(f|_k\sigma^{-1})(z) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n e^{2\pi inz/h} \tag{1.35}$$

na skupu $\{z \in \mathbb{H} : \Im z > L\}$ za dovoljno veliki L. Ako je $N \geq 0$ kažemo da je f *holomorfna u kuspu x*, a za $N = 0$ kažemo da f *ima nulu u kuspu x*. Definicija holomorfnosti ne ovisi o izboru preslikavanja σ: ako uzmemo neki drugi $\sigma_1 \in SL_2(\mathbb{R})$ takav da je $\sigma_1.x = \infty$, tada je $\sigma\sigma_1^{-1}.\infty = \infty$ pa je $\sigma_1^{-1} = \sigma^{-1}\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1}\end{smallmatrix}\right)$ za neke a, b. Za daljnje vrijednosti imamo $h_1 = h/a^2$ i $g_1(w) = a^m g(cw)$, pri čemu je $c = e^{2\pi iab/h}$.

Definicija 1.17 *Funkcija $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ se naziva **modularna forma težine** k za modularnu grupu Γ ako je holomorfna na $\mathbb{H}$, slabo modularna težine k na Γ i holomorfna u svim kuspovima grupe Γ. Holomorfne, slabo modularne funkcije koje su meromorfne u kuspovima nazivaju se **slabo holomorfne modularne forme.***

Napomenimo da Fourierov razvoj u kuspu ∞,

$$f(z) = \sum_{n=N} a_n q^n, \quad a_N \neq 0, q = e^{2\pi iz}$$

jednoznačno određuje modularnu formu pa su one najčešće zadane upravo svojim Fourierovim razvojem u kuspu ∞.

Modularne forme težine k na modularnoj grupi Γ čine konačno-dimenzionalan kompleksan vektorski prostor $M_k(\Gamma)$, skup kusp formi (forme koje imaju nultočku u svakom kuspu) je njegov potprostor $S_k(\Gamma)$, a dimenzije tih prostora dane su sljedećim teoremom ([30],Teorem 2.5.2):

Teorem 1.18 *Neka je Γ modularna grupa, $k \geq 2$ paran broj i g genus od $X(\Gamma)$. Tada vrijedi:*

$$\dim S_k(\Gamma) = \begin{cases} g & : k = 2 \\ (k-1)(g-1) + \nu_2(\Gamma)\left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor + \nu_3(\Gamma)\left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor + \left(\frac{k}{2} - 1\right)\nu_\infty(\Gamma) & : k \geq 4 \end{cases}$$

$$\dim M_k(\Gamma) = \begin{cases} \dim S_k(\Gamma) + \nu_\infty(\Gamma) - 1 & : k = 2 \ i \ \nu_\infty(\Gamma) > 0 \\ \dim S_k(\Gamma) + \nu_\infty(\Gamma) & : k \geq 4 \ ili \ k = 2 \ i \ \nu_\infty(\Gamma) = 0. \end{cases}$$

Koristeći Teorem 1.10, Teorem 1.12 i Teorem 1.15 možemo izračunati dimenzije prostora modularnih formi na kongruencijskim podgrupama $\Gamma_0(N), \Gamma_1(N)$ i $\Gamma(N)$.

Ako je $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, tada je $M_k(\Gamma_2) \subseteq M_k(\Gamma_1)$. Na primjer, sve modularne forme težine k za grupu $\Gamma(1)$ su modularne forme iste težine na grupama $\Gamma_0(N)$, za sve N.

1.5.1 Formula valencije i uvjeti iščezavanja modularnih formi

Navest ćemo formulu za broj nultočaka modularne forme te uvjete na Fourierov razvoj koje zadovoljavaju forme jednake nuli. Krećemo od formule poznate kao formula valencije koja broji nultočke modularne forme težine k na $\Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z})$. Grupa $\Gamma(1)$ ima jedan kusp ∞, jednu eliptičku točku reda 2, i, te jednu eliptičku točku reda 3, $\omega = e^{\pi i/3}$. Navodimo teorem valencije kao u ([21], Propozicija 3.2):

Teorem 1.19 *Neka je $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ ne-nul meromorfna funkcija koja je slabo modularna težine k na $\Gamma(1)$. Za $\xi \in \mathbb{Z}$ s $\nu_\xi(f)$ označimo red nultočke funkcije f u točki ξ (ili minus red pola) te s $\nu_\infty(f)$ red od f u kuspu od $\Gamma(1)$. Tada vrijedi sljedeća formula:*

$$\nu_\infty(f) + \frac{1}{2}\nu_i(f) + \frac{1}{3}\nu_\omega(f) + \sum_{\xi \in \Gamma(1)\backslash\mathbb{H}, \xi \neq i,\omega} \nu_\xi(f) = \frac{k}{12}.$$

Dokazujemo sličnu formulu za modularne forme na modularnoj grupi $\Gamma \subseteq \Gamma(1)$. Označimo $e_\xi = |\Gamma_\xi|$.

Teorem 1.20 (Formula valencije na modularnoj grupi) *Neka je $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ ne-nul meromorfna funkcija koja je slabo modularna težine k na modularnoj grupi Γ. Za $\xi \in \mathbb{Z}$ s $\nu_\xi(f)$ označimo red nultočke funkcije f u točki ξ (ili minus red pola) te s $\nu_c(f)$ red od f u kuspu c od Γ. Tada vrijedi sljedeća formula:*

$$\sum_{c \in C(\Gamma)} \nu_c(f) + \sum_{\xi \in \Gamma\backslash\mathbb{H}} \frac{\nu_\xi(f)}{e_\xi} = \frac{k\,[\Gamma(1):\Gamma]}{12},$$

pri čemu je $C(\Gamma)$ skup neekvivalentnih kuspova od Γ.

Dokaz. Dokaz slijedi dokaz iz skripte M. Kazalickog priređene za kolegij Modularne forme, [18].

Neka je $g(z) = \prod_{\gamma \in \Gamma(1)/\Gamma} f|_k\gamma$. Ta je funkcija modularna forma težine $k\,[\Gamma(1):\Gamma]$ za $\Gamma(1)$ pa po Teoremu 1.19 vrijedi

$$\nu_\infty(g) + \sum_{\xi \in \Gamma(1)\backslash\mathbb{H}} \frac{\nu_\xi(g)}{e_\xi} = \frac{k\,[\Gamma(1):\Gamma]}{12}.$$

Za $\xi \in \mathbb{H} \cup C(\Gamma)$ vrijedi

$$\nu_\xi(g) = \nu_\xi \left(\prod_{\gamma \in \Gamma(1)/\Gamma} f|_k \gamma \right) = \sum_{\gamma \in \Gamma(1)/\Gamma} \nu_\xi(f|_k \gamma) = \sum_{\gamma \in \Gamma(1)/\Gamma} \nu_{\gamma.\xi}(f)$$

i tvrdnja slijedi.

□

Iz ove formule slijedi da modularna forma ima ograničeni red nultočke, ([21], Teorem 3.13).

Korolar 1.21 (Sturmova ocjena) *Neka je Γ modularna grupa i $f \in M_k(\Gamma)$ s Fourierovim razvojem $f(z) = \sum\limits_{n=M}^{\infty} a_n q^n$, $q = e^{2\pi i z}, a_M \neq 0$. Ako je $M > \frac{k[\Gamma(1):\Gamma]}{12}$, tada je $f = 0$.*

Dakle, konačan broj početnih koeficijenata u Fourierovom razvoju u kuspu ∞ jednoznačno određuje modularnu formu.

1.5.2 Divizor modularne forme

Modularne forme neke parne težine k na modularnoj grupi Γ su holomorfne funkcije na $\mathbb{H}^*$, ali ako ih gledamo kao preslikavanja na modularnoj krivulji $X(\Gamma)$ one su diferencijali stupnja $k/2$. U [30], §2.3. pokazano je kako modularnoj formi parne težine $k = 2m$ pridružiti diferencijal stupnja m na $X(\Gamma)$ i obratno, odnosno dokazano je da postoji izomorfizam graduiranih algebri automorfnih formi na Γ i diferencijala na $X(\Gamma)$. Modularnoj formi f pridružen je diferencijal ω_f, s lokalnim izrazom $\{(\phi_\alpha, V_\alpha, t_\alpha)\}$, pri čemu je $\{(V_\alpha, t_\alpha)\}$ koordinatni sustav na $X(\Gamma)$, a ϕ_α meromorfna funkcija na V_α definirana za obične ili eliptičke točke s

$$\phi_\alpha \circ \pi(z) = f(z)(d(t_\alpha \circ \pi(z))/dz)^{-m}, \tag{1.36}$$

dok za kuspove $\mathbf{a} = \pi(x)$ definiramo lokalnu koordinatu na V_α sa $t_\alpha \circ \pi(z) = e^{2\pi i \sigma.z/h}$ i broj $c = (2\pi i/h)^{-m}$, pri čemu je h širina kuspa (definirano u (1.25)). Sada definiramo:

$$\phi_\alpha \circ \pi(z) = c(f \mid_{2m} \sigma^{-1})(\sigma.z)(t_\alpha \circ \pi(z))^{-m}. \tag{1.37}$$

Da bismo definirali divizor ne-nul modularne forme f na modularnoj krivulji $X(\Gamma)$ prvo definiramo red u svakoj točki.

Neka je $\mathbf{a} = \pi(\xi)$ obična ili eliptička točka i označimo sa $e_{\mathbf{a}}$ indeks ramifikacije. Za svaki $\gamma \in \Gamma$ imamo $f(\gamma.z) = j(\gamma, z)^k f(z)$ pa za $\xi' = \gamma.\xi$ je red holomorfne funkcije f u ξ' jednak redu u ξ, to jest $\nu_\xi(f) = \nu_{\xi'}(f)$. To nam omogućuje da definiramo

$$\nu_{\mathbf{a}}(f) = \nu_\xi(f)/e_\xi. \tag{1.38}$$

Neka je $\mathbf{a} = \pi(x)$ kusp i uzmimo $\sigma \in SL_2(\mathbb{R})$ takav da $\sigma.x = \infty$. Fourierov razvoj od f u kuspu x ima oblik

$$(f|_k\sigma^{-1})(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \sigma z/h},$$

pri čemu je $h = \kappa(x, \Gamma)$. Stavimo $\nu_x(f) = N$, gdje je N takav da vrijedi $a_1 = \cdots = a_{N-1} = 0$ i $a_N \neq 0$. Ova definicija ne ovisi o σ i za $x' = \gamma.x$ vrijedi $\nu_{x'}(f) = \nu_x(f)$ pa za $\mathbf{a} \in X(\Gamma)$ pridruženu kuspu x definiramo

$$\nu_{\mathbf{a}}(f) = \nu_x(f). \tag{1.39}$$

Kada je bitno naglasiti na kojoj grupi Γ je definirana modularna forma f, red ćemo označiti s

$$\nu_{\mathbf{a}}(f; \Gamma).$$

Definicija 1.22 ***Divizor modularne forme*** *f dan je formulom*

$$div(f) = \sum_{\boldsymbol{a} \in X(\Gamma)} \nu_{\boldsymbol{a}}(f)\boldsymbol{a}, \tag{1.40}$$

pri čemu je pojam divizora proširen tako da on može poprimati i racionalne vrijednost.

Iz (1.36) pokaže se da vrijedi

$$\nu_{\mathbf{a}}(\omega_f) = \nu_{\mathbf{a}}(f) - k(1 - 1/e_{\mathbf{a}}), \tag{1.41}$$

gdje je $e_{\mathbf{a}}$ indeks ramifikacije točke $\mathbf{a}$. Posebno, vrijedi da je $\nu_{\mathbf{a}}(f) = \nu_{\mathbf{a}}(\omega_f)$ za sve obične točke, dok za kuspove iz (1.37) imamo

$$\nu_{\mathbf{a}}(\omega_f) = \nu_{\mathbf{a}}(f) - k. \tag{1.42}$$

Sada znamo da je $\nu_{\mathbf{a}}(f) \neq 0$ samo za konačno mnogo $\mathbf{a}$ pa možemo definirati stupanj divizora s

$$\deg(\mathrm{div}(f)) = \sum_{\mathbf{a} \in \mathfrak{R}_\Gamma} \nu_{\mathbf{a}}(f) \in \mathbb{Q}. \tag{1.43}$$

U sljedećoj lemi koje se može naći u [33], Lema 4-1 ili [35], Lema 2-2 navedena su neka bitna svojstva divizora modularnih formi. Ove tvrdnje mogu se naći i u [30], §2.3.

Lema 1.23 *Neka je Γ modularna grupa, $k \geq 2$ paran i $f \in M_k(\Gamma) \setminus \{0\}$. Označimo s $t = \nu_\infty(\Gamma)$ broj neekvivalentnih kuspova od Γ i s g genus od $X(\Gamma)$. Vrijedi:*

(i) Za svaki $\boldsymbol{a} \in X(\Gamma)$ vrijedi $\nu_{\boldsymbol{a}}(f) \geq 0$.

(ii) Za kusp $\boldsymbol{a} \in X(\Gamma)$ je $\nu_{\boldsymbol{a}}(f) \geq 0$ cijeli broj.

(iii) Ako je $\boldsymbol{a} \in X(\Gamma)$ obična točka, tada je $\nu_{\boldsymbol{a}}(f)$ cijeli broj. Ako je $\boldsymbol{a} \in X(\Gamma)$ eliptička točka, tada je $\nu_{\boldsymbol{a}}(f) - \frac{k}{2}(1 - 1/e_{\boldsymbol{a}})$ cijeli broj.

(iv)
$$\deg(div(f)) = k(g-1) + \frac{k}{2}\left(t + \sum_{\boldsymbol{a} \in X(\Gamma),\ eliptička} (1 - 1/e_{\boldsymbol{a}})\right) \tag{1.44}$$

(v) Postoji cjelobrojni divizor $D_f \geq 0$ stupnja $\dim M_k(\Gamma) + g - 1$ takav da vrijedi:
$$div(f) = D_f + \sum_{\boldsymbol{a} \in X(\Gamma),\ eliptička} \left(\frac{k}{2}(1 - 1/e_{\boldsymbol{a}}) - \left\lfloor \frac{k}{2}(1 - 1/e_{\boldsymbol{a}}) \right\rfloor\right) \boldsymbol{a}. \tag{1.45}$$

(v) Ako je $f \in S_k(\Gamma)$, tada postoji cjelobrojni divizor D'_f stupnja $\dim S_k(\Gamma) + g - 1$ za $k \geq 4$ odnosno stupnja $g - 1$ za $k = 2$, dan s
$$D'_f = D_f - \sum_{\boldsymbol{a} \in X(\Gamma)\ kusp} \boldsymbol{a}. \tag{1.46}$$

Dokaz.

Prve tri tvrdnje slijede iz (1.41), (1.42) i činjenice da je red meromorfne funkcije na kompaktnoj Riemannovoj plohi jednak 0 osim za konačno mnogo točaka. Tvrdnja (iii) je istovjetna s tvrdnjom teorema valencije, Teorem 1.20. Tvrdnja (iv) nalazi se u [30], Teorem 2.3.3. Radi potpunosti izlaganja, dokažimo tvrdnju (v). Iz (iii) slijedi da postoji cijeli broj M takav da

$$\nu_{\mathbf{a}}(f) = \frac{k}{2}(1 - 1/e_{\mathbf{a}}) + M = \left(\frac{k}{2}(1 - 1/e_{\mathbf{a}}) - \left\lfloor \frac{k}{2}(1 - 1/e_{\mathbf{a}}) \right\rfloor\right) + \left(\left\lfloor \frac{k}{2}(1 - 1/e_{\mathbf{a}}) \right\rfloor + M\right),$$

odnosno imamo
$$\nu_{\mathbf{a}}(f) - \left(\frac{k}{2}(1 - 1/e_{\mathbf{a}}) - \left\lfloor \frac{k}{2}(1 - 1/e_{\mathbf{a}}) \right\rfloor\right) \in \mathbb{Z}.$$

Definiramo divizor $D_f = \sum_{\mathbf{a} \in X(\Gamma)} d_{\mathbf{a}} \mathbf{a}$ s

$$d_{\mathbf{a}} = \begin{cases} \nu_{\mathbf{a}}(f) - \left(\frac{k}{2}(1 - 1/e_{\mathbf{a}}) - \left\lfloor \frac{k}{2}(1 - 1/e_{\mathbf{a}}) \right\rfloor\right), & : \mathbf{a} \text{ je eliptička točka} \\ \nu_{\mathbf{a}}(f), & : \text{ inače} \end{cases}$$

odnosno vrijedi:

$$D_f = \operatorname{div}(f) - \sum_{\mathbf{a} \text{ eliptička}} \left(\frac{k}{2}(1 - 1/e_{\mathbf{a}}) - \left\lfloor \frac{k}{2}(1 - 1/e_{\mathbf{a}}) \right\rfloor \right) \mathbf{a}.$$

Računamo njegov stupanj koristeći (iv) i činjenicu da su eliptičke točke na modularnoj grupi reda 2 ili 3:

$$\begin{aligned}
\deg(D_f) &= \deg(\operatorname{div}(f)) - \sum_{\mathbf{a} \text{ eliptička}} \left(\frac{k}{2}(1 - 1/e_{\mathbf{a}}) - \left\lfloor \frac{k}{2}(1 - 1/e_{\mathbf{a}}) \right\rfloor \right) \\
&= k(g-1) + \frac{k}{2}t + \sum_{\mathbf{a} \text{ eliptička}} \left\lfloor \frac{k}{2}(1 - 1/e_{\mathbf{a}}) \right\rfloor \\
&= k(g-1) + \frac{k}{2}t + \nu_2(\Gamma) \left\lfloor \frac{k}{4} \right\rfloor + \nu_3(\Gamma) \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor
\end{aligned}$$

Ako je $k \geq 4$, iz Teorema 1.18 vidimo da je $\deg D_f = \dim M_k(\Gamma) + g(\Gamma) - 1$.

U slučaju $k = 2$ vrijedi $\lfloor \frac{k}{4} \rfloor = \lfloor \frac{k}{3} \rfloor = 0$ i znamo da modularne grupe uvijek imaju barem jedan kusp odnosno $t > 0$, pa iz Teorema 1.18 imamo

$$\dim M_2(\Gamma) + g - 1 = g + t - 1 + g - 1 = 2(g-1) + t$$

i vidimo da je $\deg D_f = \dim M_k(\Gamma) + g(\Gamma) - 1$ za $k = 2$.

Dokažimo tvrdnju (vi). Ako je $f \in S_k(\Gamma)$, tada je $\operatorname{div}(f)(\mathbf{a}) > 0$ za svaki kusp $\mathbf{a} \in X(\Gamma)$. Očito vrijedi

$$\deg(D'_f) = \deg(D_f) - t = \dim M_k(\Gamma) + g - 1 - t.$$

Ako je $k \geq 4$, koristeći Teorem 1.18 imamo da je

$$\deg(D'_f) = \dim S_k(\Gamma) + g - 1,$$

a u slučaju $k = 2$

$$\deg(D'_f) = \dim S_k(\Gamma) - 1 = g - 1.$$

□

2 η-kvocijenti

U ovom poglavlju predstavljena je jedna klasa modularnih formi dobivenih iz Dedekindove η-funkcije množenjem i skaliranjem, funkcije oblika

$$\prod_{\delta | N} \eta(\delta z)^{r_\delta}, \quad r_\delta \in \mathbb{Z}$$

koje se nazivaju η-kvocijenti. Uz određene uvjete na cijele brojeve r_δ, ove su funkcije modularne forme na $\Gamma_0(N)$. Vrlo su pogodne za računanje jer postoji formula za red u kuspu pa je jednostavno izračunati divizor. Imaju cjelobrojne koeficijente u Fourierovom razvoju. Glavni primjer je Ramanujanova delta funkcija $\Delta(z) = \eta(z)^{24}$ koja je kusp forma težine 12 za $SL_2(\mathbb{Z})$. Osnovne formule transformacije za Dedekindovu η-funkciju mogu se naći u većini knjiga o modularnim formama, na primjer u [2], §3 ,[30], §4.4.4, [39], §1.4. Uvjeti slabe modularnosti η-kvocijenata dokazani su u [37], [38] za poseban oblik η-kvocijenata, u [26] za modularne funkcije i forme težine 2, te u [15] u općenitijem slučaju. Proučavanje η-kvocijenata kao holomorfnih funkcija za $\Gamma_0(N)$, bez uvjeta slabe modularnosti, može se naći u [22], gdje je proučavana veza s theta funkcijama te u doktorskom radu [3] gdje se proučava njihova faktorizacija na ireducibilne funkcije. Odgovor na pitanje kakve prostore modularnih formi generiraju η-kvocijenti može se naći u [8] za slučaj $\Gamma_0(N)$ genusa 0, [19] te [42]. Pomoću njih se konstruiraju modeli za modularne krivulje $X_0(N)$ u [14], [29].

2.1 Dedekindova η-funkcija

Označimo $q = e^{2\pi i z}$. Preslikavanje $z \mapsto q$ je holomorfno preslikavanje gornje poluravnine $\mathbb{H}$ na otvoreni jedinični disk bez ishodišta $\mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Definicija 2.1 *Dedekindova η-funkcija definirana je kao beskonačni produkt*

$$\eta(z) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad z \in \mathbb{H}. \tag{2.1}$$

Budući da je q u otvorenom jediničnom disku, gornji produkt konvergira i definira holomorfnu funkciju gornje poluravnine. Iz definicije je jasno da ova funkcija nema nultočaka na $\mathbb{H}$. Pogledajmo kako se ova funkcija transformira s obzirom na $SL_2(\mathbb{Z})$, prvo na generatorima te grupe. Iz definicije je jasno da za $z \in \mathbb{H}$ vrijedi

$$\eta(z+1) = e^{\pi i/12} \eta(z).$$

Za drugi generator imamo ([2], Teorem 3.1):

Teorem 2.2 *Neka je $z \in \mathbb{H}$. Tada vrijedi:*

$$\eta\left(\frac{-1}{z}\right) = (-iz)^{1/2} \eta(z).$$

Općenito, vrijedi ([2], Teorem 3.4):

Teorem 2.3 *Neka je $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$, $c > 0$ i $z \in \mathbb{H}$. Tada vrijedi:*

$$\eta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \epsilon(a,b,c,d) \left\{-i(cz+d)\right\}^{1/2} \eta(z), \tag{2.2}$$

pri čemu je

$$\epsilon(a,b,c,d) = e^{\pi i \left(\frac{a+d}{12c} + s(-d,c)\right)}, \tag{2.3}$$

a $s(\alpha, \beta)$ je Dedekindova suma definirana formulom

$$s(\alpha,\beta) = \sum_{\lambda=1}^{\beta-1} \frac{\lambda}{\beta} \left(\frac{\alpha\lambda}{\beta} - \left\lfloor \frac{\alpha\lambda}{\beta} \right\rfloor - \frac{1}{2} \right).$$

Iz Eulerove formule

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{1}{2}m(3m-1)}$$

dobivamo sljedeći razvoj η-funkcije:

$$\eta(z) = q^{\frac{1}{24}} \left(1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + q^{22} + q^{26} - q^{35} - q^{40} + q^{51} + q^{57} + \ldots\right).$$

2.1.1 η-kvocijenti

Definicija 2.4 *Svaku funkciju oblika*

$$f(z) = \prod_{\delta | N} \eta(\delta z)^{r_\delta} \tag{2.4}$$

*za $N \geq 1$ i $r_\delta \in \mathbb{Z}$ nazivamo η-**kvocijent** nivoa N.*

Svaki η-kvocijent je holomorfna funkcija gornje poluravnine i nema nultočaka na $\mathbb{H}$.

Ovakve funkcije jako se često javljaju kao eksplicitni opisi modularnih formi te kao kombinatorne funkcije izvodnice. Evo par primjera:

$$\frac{1}{\eta(z)} = q^{-1/24} \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n,$$

$$\eta(z)^{24} = \Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n,$$

$$\frac{\eta(z)^2}{\eta(2z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2},$$

$$\frac{\eta(2z)^5}{\eta(z)^2 \eta(4z)^2} = \theta_0(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2},$$

$$\frac{\eta(16z)^2}{\eta(8z)} = \sum_{n=0}^{\infty} q^{(2n+1)^2},$$

$$E_4(z) = \frac{\eta(z)^{16}}{\eta(2z)^8} + 2^8 \cdot \frac{\eta(2z)^{16}}{\eta(z)^8},$$

$$E_6(z) = \frac{\eta(z)^{24}}{\eta(2z)^{12}} - 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \eta(2z)^{12} - 2^9 \cdot 3 \cdot 11 \cdot \frac{\eta(2z)^{12} \eta(4z)^8}{\eta(z)^8} + 2^{13} \cdot \frac{\eta(4z)^{24}}{\eta(2z)^{12}},$$

pri čemu je $p(n)$ funkcija particije (broj rastava broja n na sumu manjih brojeva), $\tau(n)$ je Ramanujanova τ funkcija, a E_4, E_6 su Eisenteinovi redovi težina 4 odnosno 6. Također, pokaže se da je

$$\Delta(z) = \frac{E_4(z)^3 - E_6(z)^2}{1728}.$$

Budući da Eisensteinovi redovi E_4 i E_6 generiraju algebru modularnih formi parne težine na $SL_2(\mathbb{Z})$, gornji prikaz daje zaključak da se svaka modularna forma na $SL_2(\mathbb{Z})$ može prikazati kao racionalna funkcija u $\eta(z)$, $\eta(2z)$ i $\eta(4z)$ ([39], Teorem 1.67).

Sljedeća tvrdnja daje klasifikaciju onih modularnih formi koje su $\eta-$kvocijenti, citiramo iz [42], Teorem 7.

Teorem 2.5 *Pretpostavimo da je $f(z) \in M_k(\Gamma_0(N)) \cap \mathbb{Z}[[q]]$ modularna forma s cjelobrojnim Fourierovim koeficijentima te pretpostavimo da f nema nultočaka na $\mathbb{H}$. Tada je $f(z) = cg(z)$, pri čemu je $c \in \mathbb{Z}$, a $g(z)$ je η-kvocijent, odnosno vrijedi*

$$f(z) = c \prod_{\delta|N} \Delta(\delta z)^{r_\delta}.$$

Ovaj teorem je poopćenje teorema ([23], Teorem 2), koji daje uvjete kada meromorfna modularna forma na kongruencijskoj podgrupi nema nultočaka i polova na $\mathbb{H}$.

2.2 η-kvocijenti u $M_k(\Gamma_0(N))$

Zanima nas kada je η-kvocijent $f(z) = \prod_{\delta|N} \eta(\delta z)^{r_\delta}$ modularna forma s obzirom na grupu $\Gamma_0(N)$ i kada jest, kako izračunati njen divizor. To ovisi o brojevima δ i r_δ. Označimo $\delta' = N/\delta$.

2.2.1 Uvjet slabe modularnosti

Iz Teorema 2.3 slijedi da se η-kvocijent $f(z) = \prod_{\delta|N} \eta(\delta z)^{r_\delta}$ transformira na sljedeći način:

$$f\left(\frac{az+b}{Ncz+d}\right) = \{-i(Nc+d)\}^{\sum_{\delta|N} \frac{r_\delta}{2}} f(z) \prod_{\delta|N} \epsilon(a, b\delta, c\delta', d)^{r_\delta},$$

pri čemu je $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ Nc & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$, a broj ϵ je definiran s (2.3).

Iz ove formule dobivaju se uvjeti na brojeve r_δ nužni da bi f bio modularna forma s obzirom na grupu $\Gamma_0(N)$, točnije slabo modularna funkcija i dani su sljedećim teoremom.

Teorem 2.6 *Neka je $f(z) = \prod_{\delta|N} \eta(\delta z)^{r_\delta}$ takav da je $k = \sum_{\delta|N} \frac{r_\delta}{2}$ cijeli broj. Ako vrijedi da je:*

(i) $\sum_{\delta|N} \delta r_\delta \equiv 0 \pmod{24}$

(ii) $\sum_{\delta|N} \delta' r_\delta \equiv 0 \pmod{24}$

(iii) $\prod_{\delta|N} \delta^{r_\delta}$ *je kvadrat racionalnog broja*

tada je

$$f\left(\frac{az+b}{Ncz+d}\right) = (Nc+d)^k f(z)$$

odnosno f je slabo modularna funkcije težine k za $\Gamma_0(N)$.

Dokaz. Ovaj teorem slijedi iz općenitijeg teorema ([15], Teorem 3 ili [39], Teorem 1.64), a generalizacija je od ([26], Propozicija 3.1.1). $\square$

Primjer 2.7 *Funkcije koje zadovoljavaju uvjete Teorema 2.6 su holomorfne funkcije na* $\mathbb{H}$ *koje su meromorfne u kuspovima, takozvane slabo holomorfne funkcije. Primjer je funkcija*

$$\frac{\eta(z)^6\eta(15z)^2}{\eta(3z)^4}.$$

Funkcija je slabo modularna težine 2 *s obzirom na* $\Gamma_0(15)$ *jer zadovoljava uvjete Teorema 2.6:*

$$\sum_{\delta|N} \delta r_\delta = 6 - 12 + 30 = 24, \quad \sum_{\delta|N} \delta' r_\delta = 15 \cdot 6 - 20 + 2 = 3 \cdot 24$$
$$\sum_{\delta|N} r_\delta = 6 + 2 - 4 = 4, \quad \prod_{\delta|N} \delta^{r_\delta} = 3^{-4} \cdot 15^2.$$

No divizor ove funkcije je jednak

$$div\left(\frac{\eta(z)^6\eta(15z)^2}{\eta(3z)^4}\right) = 3\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}_5 - \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_\infty$$

pa vidimo da funkcija ima pol u kuspu $\boldsymbol{a}_3$*.*

2.2.2 Fourierov razvoj i linearna nezavisnost

Imamo Fourierov rastav Dedekindove η-funkcije:

$$\eta(z) = q^{\frac{1}{24}}(1 - q - q^2 + q^5 + q^7 - q^{12} + q^{22} + ...).$$

Za $f(z) = \prod_{\delta|N} \eta(\delta z)^{r_\delta}$ imamo

$$f(z) = q^{\frac{\sum_{\delta|N} \delta r_\delta}{24}} \prod_{\delta|N} \left(1 - q^\delta - q^{2\delta} + q^{5\delta} + q^{7\delta} - q^{12\delta} + q^{22\delta} + ...\right)^{r_\delta},$$

iz čega vidimo da η-kvocijenti koji su slabo modularne funkcije na $\Gamma_0(N)$ imaju cjelobrojne koeficijente u Fourierovom razvoju. Također, vidimo da je red u kuspu ∞ jednak

$$\nu_{\mathbf{a}_\infty}(f) = \frac{1}{24}\sum_{\delta|N} \delta r_\delta.$$

Ako imamo tri η-kvocijenta nivoa N, zanima nas kako ćemo provjeriti njihovu linearnu zavisnost.

Lema 2.8 *Ako su $f, g, h \in M_k(\Gamma_0(N))$ tri modularne forme takve da su brojevi $\nu_{\mathbf{a}_\infty}(f)$, $\nu_{\mathbf{a}_\infty}(g)$ i $\nu_{\mathbf{a}_\infty}(h)$ međusobno različiti, tada su te forme linearno nezavisne.*

Dokaz. Označimo $N_f = \nu_{\mathbf{a}_\infty}(f), N_g = \nu_{\mathbf{a}_\infty}(g), N_h = \nu_{\mathbf{a}_\infty}(h)$. Forme f, g, h imaju sljedeće Fourierove razvoje u kuspu ∞:

$$f(z) = \sum_{n=N_f} a_n q^n, g(z) = \sum_{n=N_g} b_n q^n, h(z) = \sum_{n=N_g} c_n q^n.$$

Pogledajmo za $z \in \mathbb{H}$ i $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ jednakost

$$\alpha f(z) + \beta g(z) + \gamma h(z) = 0.$$

Pretpostavimo da je $N_f < N_g < N_h$. Tada uz potenciju q^{N_f} dobivamo $\alpha = 0$, uz potenciju q^{N_g} dobivamo $\alpha + \beta = \beta = 0$, a uz potenciju q^{N_h} imamo $\alpha + \beta + \gamma = \gamma = 0$. Dakle, forme su linearno nezavisne.

□

2.2.3 Divizor η-kvocijenta

Kada imamo η-kvocijent koji je slabo modularna funkcija, zanima nas njen divizor. U tu svrhu prvo pogledajmo divizor modularne forme Δ s obzirom na grupu $\Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z})$. Modularna krivulja $X(1)$ ima genus jednak nula i jedan kusp koji označavamo $\mathbf{a}_\infty$.

Lema 2.9 *Divizor od Δ s obzirom na grupu $\Gamma(1)$ jednak je*

$$div(\Delta) = \boldsymbol{a}_\infty.$$

Dokaz. Iz Leme 1.23(iv) slijedi $\deg(\mathrm{div}(\Delta)) = 1$, a iz njenog Fourierovog razvoja u kuspu ∞

$$\Delta(z) = q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + 4830q^5 - 6048q^6 - 16744q^7 + \ldots$$

vidimo da je taj kusp nultočka. □

Sljedeći teorem će nam omogućiti računanje reda u kuspu η-kvocijenta.

Teorem 2.10 *Neka su Γ, Γ' modularne grupe te neka je $\alpha \in GL_2(\mathbb{Q})$ takav da vrijedi $\alpha\Gamma'\alpha^{-1} \subset \Gamma$. Neka je f slabo holomorfna modularna forma težine k na Γ. Tada vrijedi:*

(i) *preslikavanje* $s \mapsto \alpha.s$ *inducira surjekciju sa skupa kuspova od* Γ' *na skup kuspova od* Γ

(ii) $f|_k\alpha$ *je slabo holomorfna modularna forma težine* k *s obzirom na* Γ'

(iii) *Redovi u kuspovima funkcija* f *i* $f|_k\alpha$ *povezani su sljedećom formulom:*

$$\nu_s(f|_k\alpha;\Gamma) = \frac{w^2\kappa(s,\Gamma')}{\det(\alpha^*)\kappa(\alpha.s,\Gamma)}\nu_{\alpha.s}(f;\Gamma) \tag{2.5}$$

pri čemu je $\alpha^* = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ u & v \end{smallmatrix}\right) \in GL_2(\mathbb{Z})$ *matrica dobivena od* α *množenjem cijelim brojem, kusp* $s = c/d \in \mathbb{Q}$,$(c,d) = 1$ *i broj* $w = (cx + dy, cu + dv)$.

Dokaz. Tvrdnja (i) je ([3], Lema 1.1), a tvrdnje (i) i (iii) su posebni slučajevi ([3], Teorem 1.19).

□

Za neki $\delta \in \mathbb{Z}$ i holomorfnu funkciju f, funkciju $f(\delta z)$ označiti ćemo s f_δ i na takvu reskaliranu funkciju primjenjujemo Teorem 2.10.

Lema 2.11 *Neka je* $f \in M_k(\Gamma_0(M))$ *za neki* $M > 0$. *Neka je* $N > 0$ *i* $\delta > 0$, $\delta|N$.

(i) $f_\delta \in M_k(\Gamma_0(MN))$

(ii) *Neka je* $s = c/d \in \mathbb{Q}$, $(c,d) = 1$ *kusp od* $\Gamma_0(MN)$. *Tada vrijedi:*

$$\nu_s(f_\delta;\Gamma_0(MN)) = \frac{N(\delta,d)(d^2,M)}{\delta(d^2,MN)}\nu_{\delta s}(f;\Gamma_0(M)). \tag{2.6}$$

Dokaz. Za $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} \delta & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ imamo $\det(\alpha) = \delta$. Za $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ MNc & d \end{smallmatrix}\right)$ imamo

$$\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ MNc & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \delta b \\ \frac{N}{\delta}Mc & d \end{pmatrix},$$

odnosno vrijedi $\alpha\Gamma_0(MN)\alpha^{-1} \subseteq \Gamma_0(M)$

Sada možemo primjeniti Teorem 2.10. Širina kuspa od $\Gamma_0(M)$ izračunana je u §1.3.2. □

Iskoristimo ovu činjenicu za računanje reda u kuspu funkcija Δ_δ.

Korolar 2.12 *Neka je $N \in \mathbb{N}$. Tada je $\Delta_\delta \in M_{12}(\Gamma_0(N))$ za sve $\delta | N$. Nadalje, ako je c/d, $(c,d)=1$ kusp od $\Gamma_0(N)$, tada imamo*

$$\nu_{c/d}(\Delta_\delta; \Gamma_0(N)) = \frac{N(\delta,d)^2}{\delta(d^2,N)}. \tag{2.7}$$

Dakle, u $M_{12}(\Gamma_0(N))$ uvijek postoje dva η-kvocijenta, funkcije Δ i $\Delta(N\cdot) = \Delta_N$.

Korolar 2.13 *Neka je $N > 0$ i skup $\mathcal{C}_N$ skup reprezentanata kuspova od $\Gamma_0(N)$ dan s (1.24). Tada su divizori formi $\Delta, \Delta_N \in M_{12}(\Gamma_0(N))$ s obzirom na grupu $\Gamma_0(N)$ jednaki:*

$$\begin{aligned} div(\Delta) &= \sum_{c/d \in \mathcal{C}_N} \frac{N}{d(d, N/d)} \boldsymbol{a}_{\frac{c}{d}}, \\ div(\Delta_N) &= \sum_{c/d \in \mathcal{C}_N} \frac{d}{(d, N/d)} \boldsymbol{a}_{\frac{c}{d}}. \end{aligned}$$

Dokaz. Tvrdnje slijede iz Korolara 2.12, a možemo ih naći i u ([35], Lema 4-3).

□

Sada za proizvoljan η-kvocijent možemo izračunati red u kuspu.

Lema 2.14 *Neka je $f(z) = \prod_{\delta | N} \eta(\delta z)^{r_\delta}$ slabo holomorfna modularna forma s obzirom na grupu $\Gamma_0(N)$, to jest brojevi r_δ zadovoljavaju uvjete Teorema 2.6. Neka je c/d, $(c,d)=1$ kusp od $\Gamma_0(N)$. Tada je red u kuspu c/d funkcije f jednak*

$$\nu_{c/d}(f; \Gamma_0(N)) = \frac{N}{24} \sum_{\delta | N} \frac{(\delta, d)^2 r_\delta}{(N, d^2)\delta}. \tag{2.8}$$

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz Korolara 2.12 i činjenice da za holomorfne funkcije vrijedi

$$\nu_s(f_1 f_2) = \nu_s(f_1) + \nu_s(f_2), \quad \nu_s(f^r) = r\nu_s(f).$$

□

2.2.4 Matrica valuacije

Da bi $\eta-$kvocijent $f(z) = \prod_{\delta | N} \eta(\delta z)^{r_\delta}$ bio modularna forma potrebno je da zadovoljava uvjete Teorema 2.6 te da je holomorfan u svim kuspovima. Za skup kuspova grupe $\Gamma_0(N)$ uzimamo skup $\mathcal{C}_N$ definiran s (1.24) koji sadrži racionalne brojeve kojima je razlomak djelitelj od N. Broj djelitelja od N ćemo označiti s $\sigma_0(N)$. Zahtjev holomorfnosti kaže da brojevi r_δ zadovoljavaju sljedeći sustav nejednakosti:

$$\frac{N}{24}\sum_{\delta|N}\frac{(\delta,d)^2}{(N,d^2)\delta}r_\delta \geq 0, \qquad \text{za sve } d|N.$$

Možemo definirati matricu ovog sustava:

$$A_N = \frac{N}{24}\left(\frac{(\delta,d)^2}{(N,d^2)\delta}\right)_{d,\delta}$$

koja je racionalna matrica veličine $\sigma_0(N)\times\sigma_0(N)$. Ovu matricu nazivamo **matrica valuacije nivoa** N.

Propozicija 2.15 *Neka je A_N matrica valuacije nivoa N. Tada vrijedi:*

(i)

$$A_n = \bigotimes_{p^n||N, p \ prost} A_{p^n},$$

pri čemu je s $\bigotimes$ označen Kroneckerov produkt matrica.

(ii) Matrica A_N je invertibilna nad $\mathbb{Q}$.

Dokaz. Ove tvrdnje i dokazi mogu se naći u ([3], Propozicija 1.41). Ukratko, tvrdnja (i) je dokazana indukcijom po broju prostih djelitelja od N, a za druga tvrdnja slijedi iz činjenice da je inverz Kroneckerovog produkta matrica jednak Kroneckerovom produktu inverza, a izračunane su matrice $A_{p^n}^{-1}$.

□

Ako kvocijent $f(z) = \prod_{\delta|N}\eta(\delta z)^{r_\delta}$ reprezentiramo uređenom $\sigma_0(N)-$torkom brojeva $\mathbf{r}_f = (r_\delta : \delta|N)$, tada je f holomorfan u kuspovima ako vrijedi

$$A_N\mathbf{r}_f \geq 0.$$

Skup rješenja ovog sustava je stožac u $\mathbb{R}^{d(N)}$ koji prolazi ishodištem, a točke koji odgovaraju holomorfnim η-kvocijentima leže u cjelobrojnoj rešetci unutar tog stošca. Takav pristup η-kvocijentima (ne uzima se obzir slaba modularnost nego samo holomorfnost) korišten je u knjizi [22]. U [22], §4 objašnjen je algoritam koji nalazi sve η-kvocijente koji su holomorfni u kuspovima od $\Gamma_0(N)$.

2.3 Traženje η-kvocijenata

Logično je zapitati se da li za neki N i k uopće postoje η-kvocijenti u $M_k(\Gamma_0(N))$, ako postoje koliko ih ima, te kakve prostore oni generiraju. U vidu naše metode koja zahtjeva postojanje tri linearno nezavisne modularne forme neke parne težine k, zanima nas kada je prostor koji generiraju η-kvocijenti dimenzije barem 3.

Poznato je da ima konačno mnogo η-kvocijenata koji su modularne forme neke težine k, a ta činjenica slijedi iz sljedećeg rezultata ([42],Teorem 2):

Teorem 2.16 *Neka je* $f(z) = \prod_{\delta|N} \eta(\delta z)^{r_\delta} \in M_k(\Gamma_0(N))$. *Tada je*

$$\sum_{\delta|N} |r_\delta| \leq 2k \prod_{p|N} \left(\frac{p+1}{p-1}\right)^{\min\{2,\nu_p(N)\}},$$

pri čemu je $p^{\nu_p(N)}|N$ *i* $p^{\nu_p(N)+1} \nmid N$.

Ovaj rezultat prvi je dokazao Mersmann u svom doktorskom radu 1991. godine, a dokaz se može naći i u [3], §3.

Geometrijski, η-kvocijentu $\prod_{\delta|N} \eta(\delta z)^{r_\delta}$ možemo pridružiti vektor koeficijenata $\mathbf{r}_\delta = (r_\delta)_\delta \in \mathbb{Z}^{\sigma_0(N)}$, odnosno možemo ga interpretirati kao točku u $\mathbb{R}^{\sigma_0(N)}$ s cjelobrojnim koordinatama. Uvjet $\sum_\delta r_\delta = 2k$ definira hiperravninu u $\mathbb{R}^{\sigma_0(N)}$, dok uvjet $A_N \mathbf{r}_\delta \geq 0$ definira poluprostore omeđene hiperravninama.

Za $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ funkcija $\mathbf{x} \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$ je norma na $\mathbb{R}^n$, takozvana 1−norma ili taxicab norma. Teorem 2.16 kaže da uređene $\sigma_0(N)$-torke koje definiraju η-kvocijent u $M_k(\Gamma_0(N))$ leže u kugli u 1-normi radijusa

$$2k \prod_{p|N} \left(\frac{p+1}{p-1}\right)^{\min\{2,\nu_p(N)\}}.$$

Pogledajmo geometrijsku interpretaciju uvjeta Teorema 2.6 i Teorema 2.16 u najjednostavnijem slučaju $N = p$, kada je p prost broj. Broj p ima dva djelitelja, 1 i p, odnosno $\sigma_0(p) = 2$, pa je svaki η-kvocijent na $\Gamma_0(p)$ oblika

$$\eta(z)^{r_1} \eta(pz)^{r_p},$$

to jest možemo ga poistovjetiti s uređenim parom cijelih brojeva (r_1, r_p). Uvjet $r_1 + r_p = 2k$ definira pravac u $\mathbb{R}^2$. Grupa $\Gamma_0(p)$ ima dva kuspa, ∞ i $\mathbf{o}$. Suma $\frac{1}{24} \sum_{\delta|N} \delta r_\delta = \frac{1}{24}(r_1 + r_p)$ jednaka je redu funkcije u kuspu ∞, dok je $\frac{1}{24} \sum_{\delta|N} \delta' r_\delta = \frac{1}{24}(pr_1 + r_p)$ jednaka redu u kuspu $\mathfrak{o}$. Budući da je red u kuspu po teoremu valencije (Teorem 1.20) manji od $k(p+1)/12$ ova dva uvjeta daju dva konačna skupa paralelnih pravaca. Svaki $\eta-$kvocijent u $\Gamma_0(p)$ odgovara nekoj cjelobrojnoj točki (r_1, r_p) u $\mathbb{R}^2$ koja je sjecište tri pravca.

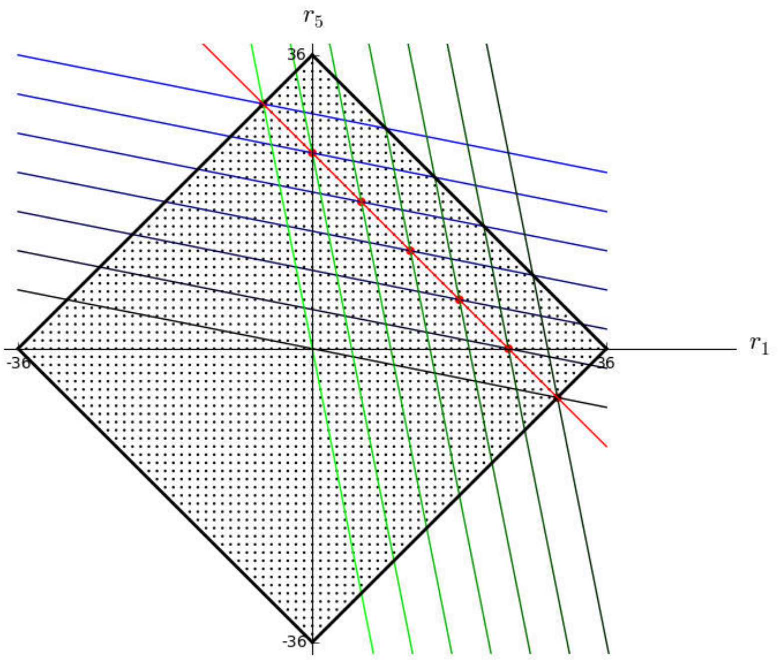
Primjer 2.17 *Pogledajmo η-kvocijente u $M_{12}(\Gamma_0(5))$. Oni odgovaraju cjelobrojnim točkama (r_1, r_5) koje zadovoljavaju jednadžbe:*

$$r_1 + r_5 = 24, \tag{2.9}$$

$$r_1 + 5r_5 = 24a, \quad a \in \{0, 1, \dots, 6\}, \tag{2.10}$$

$$5r_1 + r_5 = 24b, \quad b = 6 - a. \tag{2.11}$$

Teorem 2.16 kaže da je (r_1, r_5) unutar kugle u 1-normi radijusa 36 koja je kvadrat u $\mathbb{R}^2$. Postoji 7 η-kvocijenta u $M_{12}(\Gamma_0(5))$. Ti kvocijenti su linearno nezavisni i oni čine bazu prostora $M_{12}(\Gamma_0(5))$ jer je dimenzija tog prostora jednaka 7.

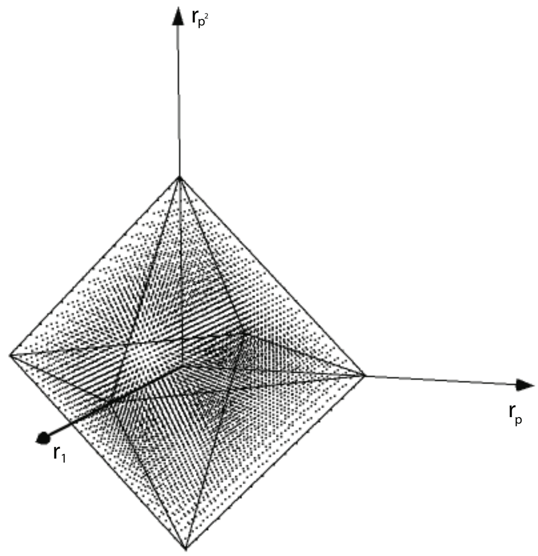


Slika 2.1: η-kvocijenti u $M_{12}(\Gamma_0(5))$

Slika 2.1 prikazuje uvjete koje zadovoljavaju uređeni parovi brojeva da bi predstavljali η-kvocijente težine 12 za $\Gamma_0(5)$. Prikazane su sve točke sa cjelobrojnim koordinatama unutar kvadrata koji je određen uvjetom Teorema 2.16. Uvjet (2.9) je pravac u $\mathbb{R}^2$ i na slici je predstavljen crvenom bojom. Uvjeti (2.10) daju sedam pravaca koji su na slici prestavljeni plavim bojama, dok su uvjeti (2.11) pravci predstavljeni zelenim bojama.

Točke koje odgovaraju η-kvocijentima označene su crvenom. Te su točke točno sjecišta tri pravca, crvenog pravca i po jednog od plavih odnosno zelenih.

Primjer 2.18 *Pogledajmo uvjete u slučaju $N = p^2$. Tada možemo η-kvocijentu pridružiti uređenu trojku brojeva (r_1, r_p, r_{p^2}) s cjelobrojnim koordinatama u $\mathbb{R}^3$ koja leži u ravninama određenim uvjetima iz Teorema* 2.6. *Uređene trojke (r_1, r_p, r_{p^2}) po Teoremu 2.16 leže u kugli u* 1*-normi unutar $\mathbb{R}^3$ radijusa* 16. *Ta je kugla oktaedar, što možemo vidjeti na Slici 2.2.*



Slika 2.2: kugla u 1-normi u $\mathbb{R}^3$ i cjelobrojne točke unutar nje

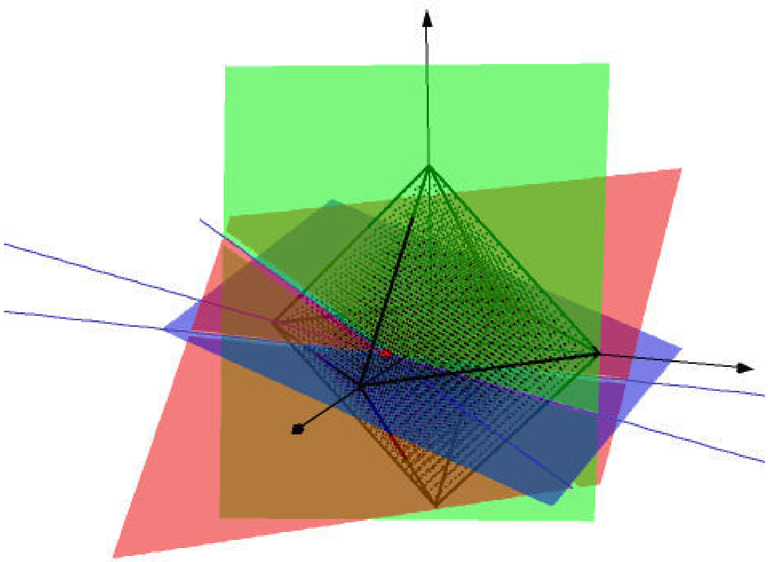
Pogledajmo slučaj $p = 3$ i forme težine 2, to jest tražimo η-kvocijente koji su u $M_2(\Gamma_0(9))$. Uvjeti su:

$$r_1 + r_3 + r_9 = 4, \tag{2.12}$$

$$r_1 + 3r_3 + 9r_9 = 24a, \quad a \in \{0, 1, 2\}, \tag{2.13}$$

$$9r_1 + 3r_3 + r_9 = 24b, \qquad b \in \{0, 1, 2\}. \tag{2.14}$$

Slika 2.3 prikazuje oktaedar i točke s cjelobrojnim koordinatama unutar njega. Crvena ravnina je grafički prikaz uvjeta (2.12)*, plava ravnina je prikaz uvjeta* (2.13) *za $a = 0$, a zelena ravnina je prikaz uvjeta* (2.14) *u slučaju $b = 2$. Crvena točka koja je sjecište tih ravnina odgovara η-kvocijentu $\eta(z)^6/\eta(3z)^2$.*



Slika 2.3: Grafički prikaz η-kvocijenta $\eta(z)^6/\eta(3z)^2$ iz $M_2(\Gamma_0(9))$

2.3.1 Veza s eliptičkim točkama

U članku [42] koji je posvećen nužnim uvjetima koji moraju biti zadovoljeni da η-kvocijenti generiraju graduirani prsten parnih modularnih formi, pokazano je da je jedan od uvjeta nepostojanje eliptičkih točaka. Formule za broj eliptičkih točaka na $\Gamma_0(N)$ dane su u Teoremu 1.10. Navodimo rezultat ([42], Lema 12):

Lema 2.19 *Neka je $k \geq 2$ paran broj. Tada postoji η-kvocijent u $M_k(\Gamma_0(N))$ ako je*

(i) $k \equiv 0 \pmod{12}$ *i* $\nu_2(\Gamma_0(N)) > 0$ *i* $\nu_3(\Gamma_0(N)) > 0$,

(ii) $k \equiv 0 \pmod{6}$ *i* $\nu_2(\Gamma_0(N)) = 0$ *i* $\nu_3(\Gamma_0(N)) > 0$,

(iii) $k \equiv 0 \pmod{4}$ *i* $\nu_2(\Gamma_0(N)) > 0$ *i* $\nu_3(\Gamma_0(N)) = 0$,

(iv) $k \equiv 0 \pmod{2}$ *i* $\nu_2(\Gamma_0(N)) = 0$ *i* $\nu_3(\Gamma_0(N)) = 0.$

Promatrajući formule iz Teorema 1.10 možemo zaključiti sljedeće:

(i) $\Gamma_0(N)$ nema eliptičke točke reda 2 ako vrijedi

$$4|N \text{ ili } p|N, \text{ pri čemu je } p \equiv 3 \pmod{4}$$

(ii) $\Gamma_0(N)$ nema eliptičke točke reda 3 ako vrijedi

$$9|N \text{ ili } p|N, \text{ pri čemu je } p \equiv 2 \pmod 3.$$

U slučaju da $\Gamma_0(N)$ nema eliptičkih točaka i N je složen broj, autori dokazuju da je tada prsten modularnih formi parne težine na $\Gamma_0(N)$ generiran η-kvocijentima, odnosno dokazuju sljedeći teorem ([42], Teorem 1):

Teorem 2.20 *Postoji točno* 121 *pozitivnih brojeva* $N \leq 500$ *takvih da je prsten modularnih formi na* $\Gamma_0(N)$ *generiran* η*-kvocijentima.*

Teorem su dokazali tako da su u svim slučajevima našli bazu za $M_2(\Gamma_0(N))$ koja se sastoji od η-kvocijenata, odnosno našli su dovoljno linearno nezavisnih η-kvocijenata težine 2. Uvjeti na složenost broja i nepostojanje eliptičkih točaka su također nužni da se prsten modularnih formi generira formama težine 2. Autori su rezultate (algoritme i tablice η-kvocijenata) objavili na web stranici `users.wfu.edu/rouseja/eta`.

3 Modeli modularnih krivulja

Neka je Γ modularna grupa i $X(\Gamma)$ modularna krivulja. Znamo da $X(\Gamma)$ ima strukturu kompaktne Riemannove plohe, a svaka kompaktna Riemannova ploha je algebarski objekt - projektivna krivulja (§1.1.2). Dakle, možemo konstruirati ulaganje kompaktne Riemannove plohe u projektivni prostor.

Definicija 3.1 *Slika ulaganja kompaktne Riemannove plohe u projektivni prostor zove se* ***model*** *početne Riemannove plohe, a homogene jednadžbe koje definiraju sliku nazivaju se* ***definirajuće jednadžbe*** *Riemannove plohe.*

Po uzoru na [35], konstruiramo preslikavanje modularne krivulje $X(\Gamma)$ u projektivnu ravninu pomoću tri linearno nezavisne modularne forme parne težine veće ili jednake 2. Primjenjujemo rezultate iz [35] na modularne grupe. Počinjemo s teorijom holomorfnih ulaganja kompaktnih Riemannovih ploha u projektivni prostor, kako je opisano u [31], §5.4. Radi potpunosti, dajemo dokaze svih tvrdnji. U točki §3.5 opisujemo kako izračunati stupanj krivulje koja je slika preslikavanja modularnim formama.

3.1 Divizori i računanje stupnja ravninskih projektivnih krivulja

Stupanj ravninske projektivne krivulje Y jednak je stupnju definirajućeg polinoma (vidi §1.2). Po Bézoutovom teoremu, svaki pravac koji nije sadržan u krivulji, siječe krivulju u $\deg Y$ točaka. Tu ćemo tvrdnju opisati na drugi način, koristeći pojam divizora pravca. To nam daje metodu računanja stupnja krivulje. Pratimo [31], §5.2.

Neka je $Y \subseteq \mathbb{P}^2$ glatka projektivna ravninska krivulja. Definiramo *divizor pravca* l, $\mathrm{div}(l)$, koji broji točke presjeka pravca i krivulje Y skupa s multiplicitetima. Neka je pravac zadan jednadžbom

$$G(x_0, x_1, x_2) = ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0.$$

Ako je $p \in Y$ i $G(p) \neq 0$ stavimo $\mathrm{div}(l)(p) = 0$. Neka je $p \in Y$ takva da je $G(p) = 0$. Neka je H linearni homogeni polinom za koji $H(p) \neq 0$. (Najjednostvnije, uzmemo onu koordinatnu funkciju koja nije nula u točki p). Sada je G/H meromorfna funkcija i definiramo

$$\mathrm{div}(l)(p) = \nu_p(G/H).$$

Budući da G/H ima nultočku u točki p, imamo $\mathrm{div}(l)(p) > 0$. Definicija ne ovisi o izboru funkcije H jer ako je H' drugi homogeni linearni polinom koji nema nultočku u p, tada je $G/H' = G/H \cdot H/H'$, a H/H' je meromorfna funkcija reda 0 u točki p.

Svaka dva divizora pravaca imaju isti stupanj. Ako su G_1 i G_2 homogeni linearni polinomi koji definiraju pravce l_1 i l_2, tada je $f = G_1/G_2$ meromorfna funkcija na Y i vrijedi

$$\mathrm{div}(f) = \mathrm{div}(l_1) - \mathrm{div}(l_2).$$

Uzmimo p i homogen linearni polinom H koji se ne poništava u p. Tada je $\mathrm{div}(l_1)(p) = \nu_p(G_1/H)$, $\mathrm{div}(l_2)(p) = \nu_p(G_2/H)$,

$$f = G_1/G_2 = (G_1/H)/(G_2/H) \Rightarrow \nu_p(f) = \nu_p(G_1/H) - \nu_p(G_2/H).$$

Kako je stupanj divizora meromorfne funkcije na kompaktnoj Riemannovoj plohi jednak 0, zaključujemo da svi divizori pravaca na glatkoj projektivnoj krivulji imaju isti stupanj. Štoviše, vrijedi da je taj stupanj točno jednak stupnju krivulje ([31], §5, Propozicija 2.12).

Lema 3.2 *Neka je Y glatka projektivna ravninska krivulja definirana s $F(x, y, z) = 0$, pri čemu je F ireducibilni homogeni polinom stupnja d. Tada svaki divizor pravca na Y ima stupanj d.*

Dokaz. Uzmimo promjenu koordinata tako da je pravac l dan jednadžbom $x_0 = 0$ i $(0 : 0 : 1) \notin Y$. Budući da se pravac l sječe s pravcem $x_1 = 0$ u točki $(0 : 0 : 1)$, zaključujemo da se polinom $H = x_1$ ne poništava na točkama iz $l \cap Y$. Divizor od l je u točki iz $l \cap Y$ definiran kao red holomorfne funkcije x_0/x_1, a očito je da je red te funkcije jednak 1. Još treba vidjeti da postoji točno d točaka u $l \cap Y$. Točke u $l \cap Y$ su oblika $(0 : 1 : \mu)$ i za njih vrijedi

$$F(0, 1, \mu) = \mu^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i \mu^i, \quad a_i \in \mathbb{C}.$$

Zbog ireducibilnosti polinoma F, $F(\mu)$ mora imati d različitih nultočaka, odnosno postoji d različitih točaka u $l \cap Y$.

□

Neka je sada Y ne nužno glatka projektivna ravninska krivulja te s V označimo komplement konačnog skupa singulariteta od Y. Ako je l pravac za koji je $l \cap Y \subseteq V$, tada kao ranije možemo definirati divizor pravca $\operatorname{div}(l)$ i vrijedi ista tvrdnja kao za glatke krivulje ([35], Lema 3-12).

Lema 3.3 *Neka je Y projektivna ravninska krivulja definirana s $F(x, y, z) = 0$, pri čemu je F ireducibilni homogeni polinom stupnja d. Ako je l pravac takav da $l \cap Y$ ne sadrži singularitete od Y, tada je stupanj divizora pravca l jednak d. Štoviše, uvijek možemo naći pravac koji sječe Y u d različitih točaka koje nisu singulariteti.*

Dokaz. Pretpostavimo da $(0 : 0 : 1) \notin Y$. Pravac kroz $(0 : 0 : 1)$ ima jednadžbu $x_0 - \lambda x_1 = 0$. Osim za konačno mnogo λ, pravac $x_0 - \lambda x_1 = 0$ neće prolaziti kroz singularne točke od Y. Pravac $x_1 = 0$ siječe pravac $x_0 - \lambda x_1 = 0$ u točki $(0 : 0 : 1)$, pa divizor možemo definirati kao red funkcije $x_0/x_1 - \lambda$, a ova funkcija očito ima red 1. Još ostaje provjeriti da je broj točaka u presjeku jednak d. Točka u presjeku je oblika $(\lambda : 1 : \mu)$ i za nju vrijedi

$$F(\lambda, 1, \mu) = \mu^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i(\lambda) \mu^i, \quad a_i \in \mathbb{C}[\mu].$$

Ovaj polinom ima d različitih rješenja za točno one λ za koje pravac $x_0 - \lambda x_1 = 0$ ne prolazi singularnom točkom. Rezultanta polinoma F i $\frac{\partial F}{\partial X_2}$ se ne poništava pa $F(\lambda, 1, \mu) = 0$ povlači $\frac{\partial}{\partial X_2} F(\lambda, 1, \mu) \neq 0$.

□

3.2 Holomorfna preslikavanja kompaktnih Riemannovih ploha

U ovoj točki definiramo holomorfna preslikavanja kompaktne Riemannove plohe u projektivnu ravninu i dokazujemo teorem koji veže stupanj preslikavanja te stupanj dobivene krivulje. Definicija stupnja preslikavanja može se naći u §1.1, definicija stupnja projektivne krivulje nalazi se u §1.2. Točka prati [31], §5.4, ali gledamo preslikavanja u projektivnu ravninu.

Definicija 3.4 *Neka je X Riemannova ploha. Preslikavanje $\varphi : X \to \mathbb{P}^2$ je* ***holomorfno u točki*** $\boldsymbol{a} \in X$ *ako postoje holomorfne funkcije f_0, f_1, f_2 definirane na okolini točke $\boldsymbol{a}$, koje nisu sve jednake 0 u $\boldsymbol{a}$, tako da za sve $\boldsymbol{b}$ u okolini od $\boldsymbol{a}$ vrijedi*

$$\varphi(\boldsymbol{b}) = (f_0(\boldsymbol{b}) : f_1(\boldsymbol{b}) : f_2(\boldsymbol{b})).$$

Preslikavanje je ***holomorfno*** *na X ako je holomorfno u svim točkama iz X. Slika preslikavanja je ireducibilna ravninska projektivna krivulja.*

Pokaže se da se holomorfnost funkcija f_0, f_1, f_2 može zamijeniti s meromorfnošću i više, da svako holomorfno preslikavanje u $\mathbb{P}^2$ možemo poistovjetiti na jedinstven način (do na množenje meromorfnom funkcijom) s uređenom trojkom meromorfnih funkcija.

Za preslikavanje $\varphi = (f_0 : f_1 : f_2)$ definiramo divizor

$$D_\varphi = -\min\{\mathrm{div}(f_0), \mathrm{div}(f_1), \mathrm{div}(f_2)\},$$

koji nazivamo *divizor pridružen preslikavanju φ.*

Neka je l pravac u $\mathbb{P}^2$ koji nije cijeli sadržan u slici od φ te G homogena linearna jednadžba za l. Za točku $\mathbf{a} \in \varphi(X)$ uzmimo homogenu linearnu jednadžbu H od l koja nije nula u $\mathbf{a}$ i promatramo funkciju $h = G/H \circ \varphi$. Ta je funkcija holomorfna u okolini točke $\mathbf{a}$ - funkcija h je razlomak koji u brojniku i nazivniku ima linearne kombinacije funkcija f_0, f_1, f_2 koje nisu sve nula u $\mathbf{a}$. Definiramo

$$\varphi^*(l)(\mathbf{a}) = \nu_{\mathbf{a}}(h),$$

red od h koji je nenegativan broj.

Divizor $\varphi^*(l)$ zovemo *divizor pravca preslikavanja φ.*

Ova definicija ne ovisi o odabranoj jednadžbi pravca jer množenje konstantom različitom od nule ne utječe na red funkcije. Divizor pravca preslikavanja ima sljedeću formu :

Lema 3.5 *Ako je pravac l dan jednadžbom $a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2=0$ i D_φ divizor pridružen preslikavanju $\varphi=(f_0:f_1:f_2)$ tada vrijedi:*

$$\varphi^*(l) = div(a_0f_0+a_1f_1+a_2f_2)+D_\varphi. \tag{3.1}$$

Dokaz. Neka je $p \in X$. Uzmimo $j \in \{0,1,2\}$ takav da je $-D_\varphi(p) = \nu_p(f_j)$. Tada x_j nije nula u $\varphi(p)$ pa za definiciju divizora pravca preslikavanja φ uzmemo funkciju $h = (\sum_i a_if_i)/f_j$. Sada je

$$\nu_p(h) = \nu_p\left(\sum_i a_if_i\right) - \nu_p(f_j) = \nu_p\left(\sum_i a_if_i\right) + D_\varphi(p).$$

□

Ova lema je poseban slučaj ([31], §5, Lema 4.13) za projektivnu ravninu.

Koristeći Lemu 3.3, dokazujemo poopćenje rezultata ([31],§5, Propozicija 4.23) na singularne krivulje. Taj rezultat daje vezu između stupnja preslikavanja i stupnja dobivene krivulje.

Teorem 3.6 *Neka je $\varphi : X \to \mathbb{P}^2$ holomorfno preslikavanje sa slikom Y i l pravac u $\mathbb{P}^2$ koji ne prolazi singularnim točkama od Y. Tada vrijedi:*

$$\deg(\varphi^*(l)) = \deg(\varphi)\deg(Y). \tag{3.2}$$

Dokaz. Za holomorfno preslikavanje $\varphi : X \to Y$ i meromorfnu funkciju h na Y vrijedi

$$\nu_p(h\circ\varphi) = \mathrm{mult}_p(\varphi)\nu_{\varphi(p)}(h)$$

pa imamo

$$\varphi^*(l)(p) = \mathrm{mult}_p(\varphi)\mathrm{div}(l)(\varphi(p)).$$

Računamo:

$$\begin{aligned}
\deg(\varphi^*(l)) &= \sum_{p\in X}\varphi^*(l)(p)\\
&= \sum_{p\in X}\mathrm{mult}_p(\varphi)\mathrm{div}(l)(\varphi(p))\\
&= \sum_{q\in Y}\sum_{p\in\varphi^{-1}(\{q\})}\mathrm{mult}_p(\varphi)\mathrm{div}(l)(q)\\
&= \deg(\varphi)\deg(\mathrm{div}(l))\\
&= \deg(\varphi)\deg(Y).
\end{aligned}$$

□

3.3 Preslikavanja u projektivnu ravninu definirana modularnim formama

Neka je Γ modularna grupa i paran broj $k \geq 2$ takav da vrijedi $\dim M_k(\Gamma) \geq 3$. Uzmimo tri linearno nezavisne modularne forme $f, g, h \in M_k(\Gamma)$. Promatramo holomorfno preslikavanje u projektivnu ravninu $\varphi : X(\Gamma) \to \mathbb{P}^2$ definirano s ove tri modularne forme

$$\varphi(\mathbf{a}_z) = (f(z) : g(z) : h(z)). \tag{3.3}$$

Napomena 3.7 *Svaka kompaktna Riemannova ploha X ima kanonsku strukturu projektivnog skupa, vidi §1.1.2. S time u vidu, preslikavanje (3.3) inicijalno je definirano na sljedeći način: gledamo otvoren podskup U koji je dobiven izbacivanjem konačnog broja nultočaka od neke modularne forme k i preslikavanje*

$$\varphi(\boldsymbol{a}_z) = (F(z) : G(z) : H(z)) = \left(\frac{f(z)}{k(z)} : \frac{g(z)}{k(z)} : \frac{h(z)}{k(z)}\right). \tag{3.4}$$

To je racionalno preslikavanje definirano na otvorenom podskupu

$$U \cap \{\boldsymbol{a}_z \in X : f(z)g(z)h(z) \neq 0\}$$

i tu je regularno. Funkcije F, G i H možemo promatrati ili kao regularne funkcije na X ili kao meromorfne funkcije na X (budući da diferencijali stupnja 0 na Riemannovim plohama odgovaraju meromorfnim funkcijama), a preslikavanje φ možemo promatrati kao regularno preslikavanje krivulja ili kao holomorfno preslikavanje Riemannovih ploha. Promatrat ćemo funkcije F, G i H kao regularne funkcije i kompaktnu Riemannovu plohu kao glatku ireducibilnu projektivnu krivulju.

Sliku preslikavanja φ iz (3.3) označimo s $C(f, g, h)$. Primjenjujemo Lemu 3-1 iz [35] na modularne grupe.

Lema 3.8 *Neka je $X(\Gamma)$ modularna krivulja i φ preslikavanje definirano s (3.3). Krivulja $C(f, g, h) \subseteq \mathbb{P}^2$ je ireducibilna krivulja stupnja manjeg ili jednakog* $\dim M_k(\Gamma) + g(\Gamma) - 1$.

Dokaz.

Preslikavanje φ je racionalno preslikavanje definirano s

$$\varphi(\mathbf{a}_z) = (1 : g(z)/f(z) : h(z)/f(z)).$$

Preslikavanje nije konstantno jer su f, g i h linearno nezavisni pa slika nije degenerirana.

Dakle, $C(f, g, h)$ je ireducibilna projektivna krivulja jer je slika racionalnog preslikavanja koje je regularno budući da je početna krivulja glatka.

Da bismo dokazali gornju ogradu za stupanj od $C(f, g, h)$ pridružimo modularnim formama f, g, h cjelobrojne divizore D_f, D_g, D_h kao u Lemi 1.23(v) i presječemo dobivenu krivulju pravcem $l \subseteq \mathbb{P}^2$ koji nije sadržan u njoj. Možemo uvesti zamjenu koordinata pa da jednadžba pravca bude $x_0 = 0$, a preslikavanje bude oblika

$$\varphi(\mathbf{a}_z) = (F(z) : G(z) : H(z)) = (1 : G(z)/F(z) : H(z)/F(z)).$$

Vrijedi:

$$\operatorname{div}(G/F) = \operatorname{div}(G) - \operatorname{div}(F) = D_G - D_F \tag{3.5}$$

$$\operatorname{div}(H/F) = \operatorname{div}(H) - \operatorname{div}(F) = D_H - D_F. \tag{3.6}$$

Tvrdnja sada slijedi jer presjek sadrži najviše $\deg C(f, g, h)$ točaka, a s druge strane točke presjeka moraju biti sadržane u nosaču cjelobrojnog divizora D_F jer zadovoljavaju $F(z) = 0$. Taj skup sadrži najviše $\deg D_F = \dim M_k(\Gamma) + g(\Gamma) - 1$ točaka.

□

Koristeći općenite rezultate prikazane u prethodne dvije točke, dolazimo do formule koja veže stupanj preslikavanja i stupanj dobivene krivulje. Primjenjujemo Teorem 3.6 u slučaju preslikavanja (3.3). Ovaj rezultat može se naći u ([35], Teorem 1-4) gdje je ista tvrdnja dokazana za Fuchsove grupe prve vrste i forme s karakterom cijele ili polu-cijele težine. Primjenjujemo taj rezultat na modularne grupe i forme parne težine.

Teorem 3.9 *Neka je* Γ *modularna grupa. Neka je* $k \geq 2$ *paran broj takav da je* $\dim M_k(\Gamma) \geq 3$ *te neka su* $f, g, h \in M_k(\Gamma)$ *linearno nezavisne modularne forme. Označimo s* g *genus* *plohe $X(\Gamma)$. Tada vrijedi:*

$$d(f,g,h)\deg C(f,g,h) = \dim M_k(\Gamma) + g - 1 - \sum_{\boldsymbol{a}\in X(\Gamma)} \min(D_f(\boldsymbol{a}), D_g(\boldsymbol{a}), D_h(\boldsymbol{a})). \quad (3.7)$$

Ako je $k \geq 4$ i $f,g,h \in S_k(\Gamma)$ tada vrijedi:

$$d(f,g,h)\deg C(f,g,h) = \dim S_k(\Gamma) + g - 1 - \sum_{\boldsymbol{a}\in X(\Gamma)} \min(D_f(\boldsymbol{a}), D_g(\boldsymbol{a}), D_h(\boldsymbol{a})).$$

Ako je $k = 2$ i $f,g,h \in S_k(\Gamma)$ tada vrijedi:

$$d(f,g,h)\deg C(f,g,h) = g - 1 - \sum_{\boldsymbol{a}\in X(\Gamma)} \min(D_f(\boldsymbol{a}), D_g(\boldsymbol{a}), D_h(\boldsymbol{a})).$$

Dokaz. Uzmimo $l \in M_k(\Gamma)$ ne-nul modularnu formu. Tada je preslikavanje oblika

$$\varphi(\mathbf{a}_z) = (F(z) : G(z) : H(z)),$$

gdje su $F(z) = f(z)/l(z), G(z) = g(z)/l(z), H(z) = h(z)/l(z)$ regularne funkcije (iz Napomene 3.7). Definiramo divizor preslikavanja

$$D_{\varphi,l}(\mathbf{a}_z) = -\min\left\{\mathrm{div}(F)(\mathbf{a}_z), \mathrm{div}(G)(\mathbf{a}_z), \mathrm{div}(H)(\mathbf{a}_z)\right\}.$$

Računamo stupanj tog divizora

$$\begin{aligned}
\deg(D_{\varphi,l}) &= -\sum_{\mathbf{a}_z\in X(\Gamma)} \min\left\{\mathrm{div}(F)(\mathbf{a}_z), \mathrm{div}(G)(\mathbf{a}_z), \mathrm{div}(H)(\mathbf{a}_z)\right\} \\
&= -\sum_{\mathbf{a}_z\in X(\Gamma)} \min\left\{D_f(\mathbf{a}_z) - D_l(\mathbf{a}_z), D_g(\mathbf{a}_z) - D_l(\mathbf{a}_z), D_h(\mathbf{a}_z) - D_l(\mathbf{a}_z)\right\} \\
&= \deg(D_l) - \sum_{\mathbf{a}_z\in X(\Gamma)} \min\left\{D_f(\mathbf{a}_z), D_g(\mathbf{a}_z), D_h(\mathbf{a}_z)\right\},
\end{aligned}$$

pri čemu su D_f, D_g, D_h i D_l cjelobrojni divizori pridruženi modularnim formama f,g,h i l kao u Lemi 1.23 (v). Stupnjevi tih divizora iznose $\dim M_k(\Gamma) + g - 1$.

Neka je L pravac u $\mathbb{P}^2$ takav da $L \cap C(f,g,h)$ ne sadrži eventualne singularne točke od $C(f,g,h)$ i neka je L definiran polinomom $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2$. Tada je divizor pravca preslikavanja φ po Lemi 3.5 jednak

$$\varphi^*(L) = \mathrm{div}(a_0F + a_1G + a_2H) + D_{\varphi,l}$$

i budući da je stupanj divizora meromorfne funkcije jednak 0, (1.9), vrijedi

$$\deg(\varphi^*(L)) = \deg(D_{\varphi,l}).$$

Koristeći Teorem 3.6 i uzevši $l = h$ dobivamo:

$$\begin{aligned}\deg C(f,g,h)d(f,g,h) &= \deg(\varphi^*(L)) \\ &= \deg(D_h) - \sum_{\mathbf{a}_z \in X(\Gamma)} \min\{D_f(\mathbf{a}_z), D_g(\mathbf{a}_z), D_h(\mathbf{a}_z)\} \\ &= \dim M_k(\Gamma) + g(\Gamma) - 1 - \sum_{\mathbf{a}_z \in X(\Gamma)} \min\{D_f(\mathbf{a}_z), D_g(\mathbf{a}_z), D_h(\mathbf{a}_z)\}\end{aligned}$$

Preostale dvije tvrdnje slijede iz Leme 1.23(vi). □

Ovaj Teorem daje test za biracionalnu ekvivalenciju, odnosno omogućuje računanje stupnja preslikavanja. Za neke tri modularne forme iste težine na modularnoj grupi Γ možemo izračunati njihove divizore, dimenziju prostora modularnih formi i genus grupe Γ te stupanj krivulje. Iz formule (3.7) izračunamo stupanj preslikavanja. Ukoliko je stupanj preslikavanja jednak 1, preslikavanje je biracionalna ekvivalencija i slika preslikavanja je model za modularnu krivulju $X(\Gamma)$.

Polje racionalnih funkcija $\mathbb{C}(C(f,g,h))$ je izomorfno potpolju od $\mathbb{C}(X(\Gamma))$ generiranom funkcijama g/f i h/f i to je izomorfizam algebri.

Propozicija 3.10 *Preslikavanje $\varphi : X(\Gamma) \to \mathbb{P}^2$ definirano s*

$$\varphi(\boldsymbol{a}_z) = (f(z) : g(z) : h(z))$$

je biracionalna ekvivalencija ako i samo ako je polje racionalnih funkcija $\mathbb{C}(X(\Gamma))$ generirano funkcijama g/f i h/f. Općenito, vrijedi

$$[\mathbb{C}(X(\Gamma)) : \mathbb{C}(g/f, h/f)] = d(f,g,h).$$

Dokaz. Treba dokazati da je polje racionalnih funkcija $\mathbb{C}(C(f,g,h))$ izomorfno polju $\mathbb{C}(g/f, h/f)$. Formula za stupanj proširenja je baš definicija stupnja preslikavanja. Preslikavanje $\varphi : X(\Gamma) \to C(f,g,h)$ inducira inkluziju funkcijskih polja $\varphi^* : \mathbb{C}(C(f,g,h)) \to \mathbb{C}(X(\Gamma))$, $\varphi^*(F) = F \circ \varphi$. Neka je P polinom koji definira $C(f,g,h)$. Element u $\mathbb{C}(f,g,h)$ je oblika

$$\frac{R(X_0, X_1, X_2)}{Q(X_0, X_1, X_2)}$$

za $Q \notin (P)$ odnosno $Q(f,g,h) \neq 0$. Komponiranjem s φ i dijeljenjem s f dolazimo do elementa

$$\frac{R(1, g/f, h/f)}{Q(1, g/f, h/f)}, \quad Q(1, g/f, h/f) \neq 0$$

i vidimo da je slika od φ^* točno $\mathbb{C}(g/f, h/f)$.

$\square$

Sljedeća lema daje dovoljan uvjet za biracionalnu ekvivalenciju i koristit ćemo taj rezultat da bismo teoretski dokazali da su neka konkretna preslikavanja biracionalne ekvivalencije. Varijante ove tvrdnje mogu se naći u ([47], Lema 1) ili ([35], Lema 5-2).

Lema 3.11 *Neka je $C(f, g, h)$ slika preslikavanja $\varphi : X(\Gamma) \to \mathbb{P}^2$ definiranog s*

$$\varphi(\boldsymbol{a}_z) = (f(z) : g(z) : h(z)).$$

Tada stupanj preslikavanja φ, koji je jednak $[\mathbb{C}(X(\Gamma)) : \mathbb{C}(C(f, g, h))]$, dijeli brojeve

$$\deg(div_\infty(g/f)) \quad i \quad \deg(div_\infty(h/f)). \tag{3.8}$$

Dovoljan uvjet da bi preslikavanje φ bilo biracionalna ekvivalencija jest da su brojevi u (3.8) *relativno prosti.*

Dokaz. Polje $\mathbb{C}(C(f, g, h))$ izomorfno je polju $\mathbb{C}(g/f, h/f)$. Imamo sljedeće nizove polja:

$$\mathbb{C}(g/f) \subseteq \mathbb{C}(g/f, h/f) \subseteq \mathbb{C}(X(\Gamma)),$$
$$\mathbb{C}(h/f) \subseteq \mathbb{C}(g/f, h/f) \subseteq \mathbb{C}(X(\Gamma)),$$

a iz (1.2) slijedi da je stupanj

$$[\mathbb{C}(X(\Gamma)) : \mathbb{C}(g/f)] = \deg(\mathrm{div}_\infty(g/f)).$$

$\square$

3.4 Veze među različitim modularnim krivuljama

Sjetimo se Leme 1.14. Ako su $\Gamma_1 \le \Gamma_2$ modularne grupe, tada imamo natkrivanje $F : X(\Gamma_1) \to X(\Gamma_2)$ stupnja $d = \left[\bar{\Gamma}_2 : \bar{\Gamma}_1\right]$ među modularnim krivuljama $X(\Gamma_1)$ i $X(\Gamma_2)$. Pretpostavimo da smo našli model za $X(\Gamma_2)$, odnosno da smo uzeli f, g, h tri linearno nezavisne modularne forme za Γ_2 kojima smo definirali preslikavanje

$$\varphi_2(\mathbf{a}_z) = (f(z) : g(z) : h(z)) \tag{3.9}$$

sa slikom $C(f,g,h)$. Modularne forme f,g,h su također modularne forme za grupu Γ_1. Postavlja se pitanje u kakvoj su vezi $X(\Gamma_1)$ i $C(f,g,h)$.

Propozicija 3.12 *Neka su $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$ modularne grupe, f,g,h tri linearno nezavisne modularne forme za Γ_2 i d stupanj natkrivanja modularnih krivulja $X(\Gamma_1) \to X(\Gamma_2)$, $d = [\bar{\Gamma}_2 : \bar{\Gamma}_1]$. Neka je $\varphi_2 : X(\Gamma_2) \to C(f,g,h)$ preslikavanje definirano s* (3.9) *preslikavanje stupnja d_2. Tada je preslikavanje $\varphi_1 : X(\Gamma_1) \to C(f,g,h)$ preslikavanje definirano istom formulom* (3.9) *preslikavanje stupnja dd_2.*

Dokaz. Imamo sljedeći komutativni dijagram:

$$\begin{tikzcd} X(\Gamma_1) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\varphi_1"] & X(\Gamma_2) \arrow[d, "\varphi_2"] \\ C(f,g,h) \arrow[r] & C(f,g,h) \end{tikzcd}$$

Stupanj preslikavanja kompozicije racionalnih preslikavanja jednak je umnošku stupnjeva racionalnih preslikavanja i tvrdnja slijedi.

$\square$

Navedimo par konkretnih primjena spomenute situacije. Znamo da je $\Gamma_0(MN) \subseteq \Gamma_0(N)$ i vrijedi

$$[\bar{\Gamma}_0(N) : \bar{\Gamma}_0(MN)] = [\Gamma_0(N) : \Gamma_0(MN)] = M \prod_{p|M, p\nmid N} (1 + 1/p).$$

Ako smo konstruirali preslikavanje $\varphi : X_0(N) \to C(f,g,h)$ koje je stupnja d, tada znamo da postoji preslikavanje definirano istim modularnim formama $\tilde{\varphi} : X_0(NM) \to C(f,g,h)$ stupnja $d[\bar{\Gamma}_0(N) : \bar{\Gamma}_0(MN)]$. Posebno, ako je φ biracionalna ekvivalencija, tada $\tilde{\varphi}$ nije biracionalna ekvivalencija.

Za svaki N, $\Gamma(N) \subseteq \Gamma_1(N) \subseteq \Gamma_0(N)$. Preslikavanje $\varphi : X_0(N) \to C(f,g,h)$ stupnja d možemo proširiti do preslikavanja $X(N) \to C(f,g,h)$ stupnja $dN\Phi(N)$ i do preslikavanja $X_1(N) \to C(f,g,h)$ stupnja $d\Phi(N)$ (zbog (1.15), (1.17)).

Zaključujemo da ukoliko želimo da preslikavanje

$$\mathbf{a}_z \to (f(z) : g(z) : h(z))$$

bude biracionalna ekivalencija modularne krivulje $X(\Gamma)$ i krivulje $C(f,g,h)$, modularne forme f,g,h ne smiju sve tri biti modularne forme za neku veću grupu koja sadrži Γ.

3.5 Stupanj krivulje $C(f, g, h)$

Svaka ireducibilna ravninska projektivna krivulja zadana je kao skup nultočaka nekog homogenog polinoma u tri varijable i taj je polinom jedinstven do na množenje konstantom (vidi §1.2). Stupanj krivulje definiran je kao stupanj tog definirajućeg polinoma. Mi imamo krivulju $C(f, g, h)$ definiranu kao sliku preslikavanja s modularne krivulje $X(\Gamma)$

$$\varphi(\mathbf{a}_z) = (f(z) : g(z) : h(z)).$$

U ovoj točki reći ćemo nešto o njenom definirajućem polinomu, zaključiti da je modularna forma i izračunati njegov stupanj.

Homogeni polinom u tri varijable određen je svojim koeficijentima $a_{i,j,k}$

$$P(x_0, x_1, x_2) = \sum_{i+j+k=d} a_{i,j,k} x_0^i x_1^j x_2^k.$$

Njihov broj iznosi

$$\#\{(i, j, k) : 0 \leq i, j, k \leq d, i + j + k = d\} = \binom{d+2}{2} = \frac{(d+2)(d+1)}{2},$$

označimo ga s d'.

Svi homogeni polinomi stupnja d čine projektivni (posebno vektorski) prostor dimenzije d', označimo ga s $\mathcal{P}_d$. Oni polinomi koji poništavaju modularne forme f, g, h čine potprostor od $\mathcal{P}_d$, koji ćemo označiti s $\mathcal{V}_d$. O dimenziji tog potprostora možemo reći sljedeće:

Lema 3.13 *Neka je* $\deg C(f, g, h) = l$ *i* $d > 0$. *Homogeni polinomi stupnja* d *koji poništavaju modularne forme* f, g *i* h *čine vektorski prostor* $\mathcal{V}_d$ *za koji vrijedi:*

$$\dim \mathcal{V}_d = \begin{cases} 0 & : \quad d < l \\ 1 & : \quad d = l \\ > 1 & : \quad d > l \end{cases}$$

Dokaz. Označimo sa P ireducibilan polinom stupnja l koji definira krivulju $C(f, g, h)$. Ako je F polinom koji se poništava na $C(f, g, h)$, tada je $F \in I = \mathcal{I}(C(f, g, h))$, a $I = (P)$ je prost homogen ideal. Prostor $\mathcal{V}_d$ je određen s

$$\mathcal{V}_d = \mathcal{P}_d \cap I \tag{3.10}$$

pa vidimo da je vektorski prostor. Budući da I ne sadrži polinome stupnja manjeg od l, slijedi da je za $d < l$ dimenzija od $\mathcal{V}_d$ jednaka 0. Polinomi stupnja l u I su oblika λP, $\lambda \in \mathbb{C}$ pa vidimo da je dimenzija od $\mathcal{V}_l$ jednaka 1. Ako je $d > l$, tada su polinomi $x_0^{l-d}P, x_1^{l-d}P, x_1^{l-d}P \in I$ i linearno su nezavisni, dakle dimenzija od $\mathcal{V}_d$ je veća od 1.

□

Za polinom $P \in \mathcal{V}_d$ vrijedi

$$P(f(z), g(z), h(z)) = \sum_{i+j+k=d} a_{i,j,k} f(z)^i g(z)^j h(z)^k = 0.$$

Budući da su f, g i h modularne forme težine k u odnosu na Γ, a $M(\Gamma) = \oplus_{k \geq 0} M_k(\Gamma)$ je graduirana algebra, $P(f, g, h)$ je također modularna forma u odnosu na Γ težine dk. Kada uvrstimo Fourierove razvoje modularnih formi, dobivamo Fourierov razvoj forme $P(f, g, h)$,

$$P(f(z), g(z), h(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n q^n = 0, \tag{3.11}$$

a Korolar 1.21 nam govori da je dovoljno da prvih $(dk)_\Gamma = \frac{dk[\Gamma(1):\Gamma]}{12} + 1$ koeficijenata bude jednako nula da bismo dobili nul-formu to jest da vrijedi

$$p_0 = p_1 = \cdots = p_{(dk)_\Gamma} = 0. \tag{3.12}$$

Nakon što uredimo skup $\{a_{i,j,k} : i + j + k = d\}$ u uređene $d'-$ torke imamo

$$\mathcal{V}_d \simeq \left\{(a_0, \ldots, a_{d'-1}) : p_0 = p_1 = \cdots = p_{(dk)_\Gamma} = 0\right\}$$

iz čega vidimo da je $\mathcal{V}_d$ skup rješenja homogenog linearnog sustava jednadžbi s d' nepoznanica i $(dk)_\Gamma + 1$ jednadžbi.

Problem traženja stupnja polinoma je pomoću Leme 3.13 sveden na traženje broja d za koji je skup rješenja pridruženog sustava dimenzije 1. Sljedeći teorem govori kako izračunati dimenziju prostora $\mathcal{V}_d$.

Teorem 3.14 *Vektorski prostor $\mathcal{V}_d$ izomorfan je jezgri linearnog operatora $L : \mathbb{C}^{d'} \to \mathbb{C}^{(dk)_\Gamma + 1}$ čija je matrica jednaka matrici A_d homogenog sustava* (3.12)*. Dimenzija mu je jednaka*

$$\dim \mathcal{V}_d = d' - r(A_d).$$

Matrica A_d je kompleksna matrica tipa $(dk)_\Gamma + 1 \times d'$ čiji koeficijenti su polinomijalne kombinacije koeficijenata Fourierovih razvoja modularnih formi f, g, h.

Dokaz.

Ako homogeni sustav ima rješenje $\mathbf{a}$, tada je $\mathbf{a} \in \ker(L)$. Po teoremu o rangu i defektu slijedi

$$\dim \mathcal{V}_d = \dim \ker(L) = d' - r(A_d).$$

Kako izračunati koeficijente uz $a_{i,j,k}$ u p_n:
za svaku trojku (i, j, k), funkcija $f^i g^j h^k$ je modularna forma težine dk za Γ i možemo izračunati njen Fourierov razvoj:

$$f^i g^j h^k = a_0^{(i,j,k)} + a_1^{(i,j,k)} q + \cdots + a_n^{(i,j,k)} q^n + \ldots.$$

Odnosno imamo:

$$P(f(z), g(z), h(z)) = \sum_{i+j+k=d} a_{i,j,k} (a_0^{(i,j,k)} + a_1^{(i,j,k)} q + \cdots + a_n^{(i,j,k)} q^n + \ldots) = 0 \tag{3.13}$$

i vidimo da je koeficijent uz $a_{i,j,k}$ u p_e jednak $a_e^{(i,j,k)}$.

Pretpostavimo da smo uredili skup indeksa (i, j, k), tada je matrica sustava (3.12) sljedeća:

$$A_d = \begin{pmatrix} a_0^{(0)} & a_0^{(1)} & \ldots & a_0^{(d'-1)} \\ a_1^{(0)} & a_1^{(1)} & \ldots & a_1^{(d'-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(dk)_\Gamma}^{(0)} & a_{(dk)_\Gamma}^{(1)} & \ldots & a_{(dk)_\Gamma}^{(d'-1)} \end{pmatrix}$$

□

3.6 Opis algoritma

Zaokružimo prethodna razmatranja algoritmom. Neka je Γ modularna grupa te f, g, h tri linearno nezavisne modularne forme kojima znamo divizore i Fourierove razvoje u kuspu ∞. Zanima nas stupanj krivulje $C(f, g, h)$ koja je slika preslikavanja $\varphi : X(\Gamma) \to \mathbb{P}^2$

$$\varphi(\mathbf{a}_z) = (f(z) : g(z) : h(z)).$$

Znamo da vrijedi formula

$$d(f,g,h)\deg C(f,g,h) = \dim M_k(\Gamma) + g - 1 - \sum_{\mathbf{a}\in X(\Gamma)} \min(D_f(\mathbf{a}), D_g(\mathbf{a}), D_h(\mathbf{a})) \quad (3.14)$$

pa budući da su brojevi na lijevoj strani cijeli brojevi, zaključujemo da je $\deg C(f,g,h)$ djelitelj desne strane formule. Preslikavanje će biti biracionalna ekvivalencija ukoliko je $\deg C(f,g,h)$ baš jednako desnoj strani formule (3.14).

Algoritam za računanje stupnja krivulje $C(f,g,h)$

1. iniciraj $d = 1$
2. $D = \dim M_k(\Gamma) + g - 1 - \sum_{\mathbf{a}\in X(\Gamma)} \min(D_f(\mathbf{a}), D_g(\mathbf{a}), D_h(\mathbf{a}))$
3. izračunaj $d' = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ i $(dk)_\Gamma$ pomoću Korolara 1.21
4. konstruiraj matricu A_d (dana je u dokazu Teorema 3.14)
5. izračunaj rang matrice A_d
6. ako je rang jednak $d' - 1$, tada je broj d stupanj krivulje, ako nije, neka je d sljedeći po veličini djelitelj broja D i vrati se na korak 2.

3.6.1 Računanje ranga matrice

Ovaj algoritam traži da matrica A_d, koja je veličine

$$d' \times (dk)_\Gamma + 1 = \frac{(d+1)(d+2)}{2} \times \frac{dk\,[\Gamma(1):\Gamma]}{120} + 1,$$

bude nepunog ranga, točnije da joj je rang za 1 manji od punog ranga. Računanje ranga matrice pomoću računala uvelike ovisi o polju nad kojim su definirani njeni koeficijenti. Na primjer, računanje ranga matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

u programu *Sage* daje rezultat 2 ako je matrica definirana kao matrica s racionalnim koeficijentima, no ako je definiramo kao matricu s realnim koeficijentima (bilo nad poljem realnih brojeva s 53-bitnom preciznosti ili kao realne brojeve s dvostrukom preciznosti) program vraća da je rang matrice jednak 3. Dakle, već na ovom primjeru matrice veličine 5×3, ako ne koristimo cjelobrojnu aritmetiku, dobivamo krivi rezultat. Program *Sage* za numeričke račune koristi programski jezik *Python* koji, kao što je uobičajeno, za računanje ranga matrice koristi SVD (Singular Value Decompostion) algoritam. Koristi se činjenica da je rang matrice jednak broju njenih pozitivnih singularnih vrijednosti. Matrica A ima tri singularne vrijednosti, $\sigma_1 \approx 2.6$, $\sigma_2 \approx 0.3$ te treću koja je jako blizu 0, $\sigma_3 \approx 1.5 \cdot 10^{-16}$. Pri realnoj aritmetici svi su brojevi zapisani s greškom, koja se propagira pri računanju. Tako računalo ovu treću singularnu vrijednost σ_3, koja je pozitivna, izjednačuje s 0. (Naravno, granica za izjednačavanje s 0 može se i konkretno zadati). Zbog tog razloga, računanje ranga matrice ili problem određivanja singularnosti kvadratne matrice vrlo je nezgodan. Čak je i uveden pojam *numeričkog ranga*, što je vrijednost koju računalo vraća za rang matrice. Više o tom problemu može se naći u [49],§4.2.

Zaključujemo sljedeće: ukoliko modularne forme s kojima konstruiramo preslikavanje modularne grupe u projektivnu ravninu nemaju racionalne koeficijente u Fourierovom razvoju, tada nema smisla koristiti ovaj algoritam, to jest numeričkim putem računati stupanj dobivene krivulje jer ne možemo biti sigurni da je rezultat točan. Dakle, zahtjev je da modularne forme imaju racionalne Fourierove koeficijente.

Pogledajmo primjer $\Gamma = \Gamma_0(N)$. Pretpostavimo da imamo tri linearno nezavisne modularne forme neke težine na $\Gamma_0(N)$ te njihove Fourierove razvoje. Tada je jednostavno konstruirati matricu A_d iz Teorema 3.14. Ta je matrica jako velika, na primjer, pretpostavimo da koristimo forme težine 12 na $\Gamma_0(36)$. Tada je

$$\dim M_{12}(\Gamma_0(36)) + g(\Gamma_0(36)) + 1 = 74.$$

Pretpostavimo da je minimum divizora formi jednak 0, pa je desna strana formule (3.14) jednaka ovoj vrijednosti. Tada je matrica A_{74} veličine 2850×31969! I ona je puna, to jest većina njenih koeficijenata je različito od 0.

Budući da se izvršava puno operacija, a unutar programa za računanje ranga ne dolazi do skraćivanja razlomaka, elementi matrice su razlomci s jako velikim brojnicima i nazivnicima, prevelikim da bi se podaci mogli pohraniti. Javlja se greška

```
Exception (FLINT memory_manager). Unable to allocate memory.
```

Dakle, ovaj algoritam u cjelobrojnoj aritmetici daje točan rezultat, no ima ograničenja, pa tako pri provjeri za grupe $\Gamma_0(N)$, možemo provesti algoritam samo za neke manje vrijedosti broja N. Ta granica ovisi o težini modularnih formi, što je ona manja, to dalje možemo računati.

3.7 Traženje modela

Sumirajmo rezultate ovog poglavlja da bismo opisali postupak traženja modela neke modularne krivulje $X(\Gamma)$.

Krećemo od modularne grupe Γ. Izaberemo tri linearno nezavisne modularne forme f, g, h težine k, naravno to je moguće ukoliko je $\dim M_k(\Gamma) \geq 3$. Izabir tri pogodne modularne forme nije lak zadatak. Prvo je pitanje kako uopće naći modularne forme za neku modularnu grupu, pogotovo treba uzeti u obzir da im moramo znati izračunati Fourierove razvoje i divizore. Kao što je rečeno, da bi se iskoristilo računalo i navedeni algoritam, potrebno je još i da te forme imaju racionalne koeficijente u Fourierovom razvoju. Nalaženje takvih formi je zanimljiv problem sam za sebe.

Dakle, potrebno je znati izračunati

- genus od $X(\Gamma)$
- $\dim M_k(\Gamma)$
- Fourierove razvoje modularnih formi f, g, h (zahtjevamo da imaju racionalne koeficijente)
- divizore modularnih formi f, g, h s obzirom na grupu Γ

Pretpostavimo da smo algoritmom izračunali stupanj krivulje $C(f, g, h)$. Sada nas zanima da li je ta krivulja model modularne krivulje $X(\Gamma)$. Da bismo to provjerili, koristimo Teorem 3.9, odnosno formulu

$$d(f, g, h) \deg C(f, g, h) = \dim M_k(\Gamma) + g - 1 - \sum_{\mathbf{a} \in X(\Gamma)} \min(D_f(\mathbf{a}), D_g(\mathbf{a}), D_h(\mathbf{a})).$$

Ako imamo izračunane sve elemente iz ove formule osim stupnja preslikavanja $d(f, g, h)$, njega izračunamo iz te formule. Ukoliko je $d(f, g, h) = 1$, krivulja $C(f, g, h)$ je model modularne krivulje $C(f, g, h)$. Kao što ćemo vidjeti u konkretnim primjerima, ta je krivulja često singularna.

4 Modeli krivulje $X_0(N)$ dobiveni pomoću η-kvocijenata

Cilj nam je naći tri linearno nezavisna η-kvocijenta i njima definirati preslikavanje $X_0(N) \to \mathbb{P}^2$. Koristimo činjenicu da su uvijek dva η-kvocijenta u $M_{12}(\Gamma_0(N))$ - funkcije $\Delta(z)$ i $\Delta_N(z) = \Delta(Nz)$.

U točki §4.1 gledamo preslikavanje definirano s Eisensteinovim redom težine 4, E_4 te funkcijama $\Delta(z)$ i $\Delta_N(z)$.

U točki §4.2 gledamo slučaj kada je N prost broj i nalazimo η-kvocijente težina $2, 4, 6$ i 12. Kada postoje tri linearno nezavisna η-kvocijenta tada konstruiramo preslikavanje s $X_0(N)$ u projektivnu ravninu i računamo njegov stupanj.

U §4.3 nalazimo one η-kvocijente težine 12 koji imaju maksimalan red u kuspu ∞ i za te funkcije i funkcije $\Delta(z)$ i $\Delta_N(z)$ konstruiramo preslikavanje i dokazujemo da je u nekim slučajevima to preslikavanje biracionalna ekvivalencija.

U §4.4 konstruiramo modele krivulje $X_0(N)$ pomoću η-kvocijenata težine 2.

4.1 Model s formama težine 12

Neka je E_4 Eisensteinov red težine 4 dan Fourierovim razvojem

$$E_4(z) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n,$$

pri čemu je $\sigma_3(n)$ jednako zbroju kubova svih pozitivnih djelitelja od n. Ta je funkcija modularna forma težine 4 na $\Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z})$ pa je $E_4^3 \in M_{12}(\Gamma(1))$. Izračunajmo njen divizor. Ti su divizori izračunani u ([35], Lema 4-1).

Lema 4.1 *Neka je* $\varepsilon = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. *Računamo divizore s obzirom na grupu* $\Gamma(1)$. *Vrijedi:*

$$div(E_4) = \tfrac{1}{3}\mathfrak{a}_\varepsilon,$$
$$div(E_4^3) = \mathfrak{a}_\varepsilon.$$

Dokaz. Genus od $\Gamma(1)$ jednak je 0, $X(1)$ ima dvije eliptičke točke $\mathbf{a}_i$ reda 2 i $\mathbf{a}_\varepsilon$ reda 3 odnosno imamo $e_{\mathbf{a}_\varepsilon} = 3$. Iz Leme 1.23 (iv) slijedi $\deg(\mathrm{div}(E_4^3)) = 1$ i $\deg(\mathrm{div}(E_4)) = \frac{1}{3}$. Za $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_\varepsilon$ imamo $E_4(\varepsilon) = E_4(\gamma.\varepsilon) = j(\gamma, \varepsilon)^4 E_4(\varepsilon)$. Budući je $j(\gamma, \varepsilon)^4 = \varepsilon^4 = -\varepsilon \neq 1$ vrijedi $E_4(\varepsilon) = 0$ pa tvrdnje slijede. □

Divizor s obzirom na grupu $\Gamma_0(N)$ izračunan je u ([35], Lema 4-3).

Lema 4.2 *Neka je* $\varepsilon = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. *Divizor forme* E_4^3 *s obzirom na grupu* $\Gamma_0(N)$ *jednak je*

$$div(E_4^3) = \sum_{\gamma \in \Gamma_0(N) \backslash SL_2(\mathbb{Z}) / SL_2(\mathbb{Z})_\varepsilon} m_\gamma \boldsymbol{a}_{\gamma.\varepsilon}$$

pri čemu je broj m_γ *jednak redu nultočke od* E_4^3 *u točki* $\gamma.\varepsilon$.

Promatramo preslikavanje $\varphi_N : X_0(N) \to \mathbb{P}^2$ definirano s

$$\varphi_N(\mathbf{a}_z) = (\Delta(z) : E_4^3(z) : \Delta_N(z)). \tag{4.1}$$

Označimo s C_N krivulju koja je slika ovog preslikavanja te s d_N stupanj preslikavanja φ_N.

Divizori s obzirom na $\Gamma_0(N)$ formi Δ i Δ_N nošeni su na skupu kuspova od $\Gamma_0(N)$, (Korolar 2.13), a taj skup je disjunktan s nosačem divizora od E_4^3 koji leži u $\mathbb{H}$. Po Teoremu 3.9 slijedi da je

$$d_N \deg C_N = \Psi(N),$$

jer pomoću Teorema 1.18 i Teorema 1.15 računamo

$$\begin{aligned}
&\dim M_{12}(\Gamma_0(N)) + g(\Gamma_0(N)) + 1 \\
&\qquad = [\Gamma(1) : \Gamma_0(N)] + \left(\left\lfloor \frac{12}{4} \right\rfloor - \frac{12}{4} \right) \nu_2(\Gamma_0(N)) + \left(\left\lfloor \frac{12}{3} \right\rfloor - \frac{12}{3} \right) \nu_3(\Gamma_0(N)) \\
&\qquad = [\Gamma(1) : \Gamma_0(N)] \overset{(1.17)}{=} \Psi(N).
\end{aligned}$$

Ukoliko bismo dokazali da je preslikavanje φ_N biracionalna ekvivalencija, dobili bismo model za $X_0(N)$ stupnja $\Psi(N)$. To je dokazano u [35], Lema 5-4 i Lema 5-5 za $N = 2$, odnosno $N = p$, $p \geq 3$ prost broj. U tijeku je istraživanje stupnja preslikavanja za općeniti N. Za dokazivanje biracionalne ekvivalencije radi se na proučavanju funkcijskog polja krivulje C_N, koristi se teorija primitivnih elemenata.

Algoritmom objašnjenom u poglavlju §3.5 izračunan je stupanj krivulje C_N za sve $N \leq 40$. Preslikavanje je biracionalna ekvivalencija u svim ispitanim slučajevima. Nije bilo moguće provjeriti za veće vrijednosti jer su matrice prevelike i računalo nema dovoljno memorije.

Po Lemi 3.10 polje racionalnih funkcija od C_N izomorfno je polju $\mathbb{C}\left(\frac{E_4^3}{\Delta}, \frac{\Delta_N}{\Delta}\right)$. U slučaju $N = 2$, za dokazivanje biracionalne ekvivalencije krivulje C_2 i modularne krivulje $X_0(2)$ koristimo Lemu 3.11 jer vrijedi:

Lema 4.3 *Neka je $N \geq 2$. Tada su stupnjevi divizora polova s obzirom na $\Gamma_0(N)$ dani s*

$$\deg\left(div_\infty\left(\frac{E_4^3}{\Delta}\right)\right) = \sum_{d|N} \frac{N\Phi((d, N/d))}{d(d, N/d)},$$
$$\deg\left(div_\infty\left(\frac{\Delta_N}{\Delta}\right)\right) = \sum_{d|N, d<\sqrt{N}} \left(\frac{N}{d} - d\right) \frac{\Phi((d, N/d))}{(d, N/d)}.$$

Dokaz. Divizori su izračunani u Korolaru 2.13 i Lemi 4.2, a ovaj rezultat može se naći u ([35], Lema 5-1).

□

U slučaju $N = p$ vrijedi

$$\deg\left(\mathrm{div}_\infty\left(\frac{E_4^3}{\Delta}\right)\right) = p + 1,$$
$$\deg\left(\mathrm{div}_\infty\left(\frac{\Delta_p}{\Delta}\right)\right) = p - 1,$$

pa po Lemi 3.11 slijedi da je preslikavanje φ_2 biracionalna ekvivalencija jer su 3 i 1 relativno prosti brojevi. Krivulja C_2 je stupnja 3 i njen definirajući polinom je

$$P(x_0, x_1, x_2) = x_0^3 + 768x_0^2x_2 - x_0x_1x_2 + 196608x_0x_2^2 + 16777216x_2^3.$$

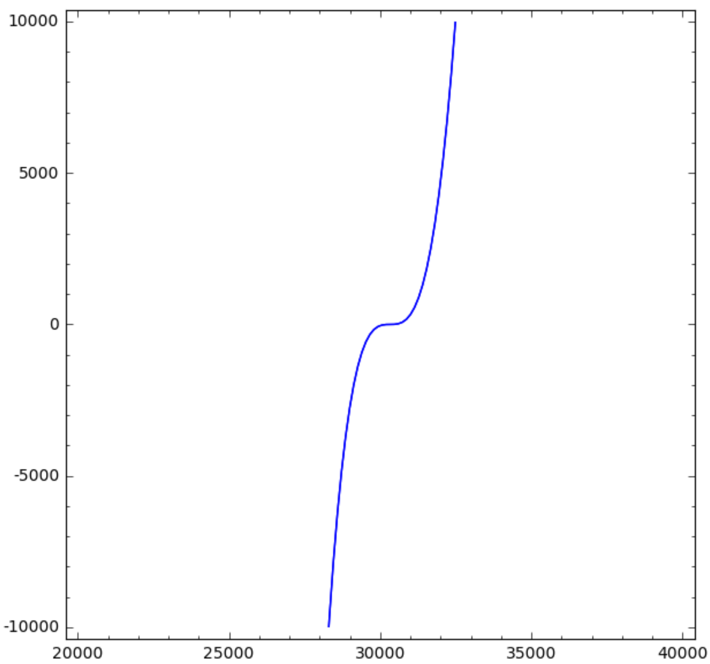
Za $N \geq 3$ ti brojevi nisu relativno prosti i ne možemo iskoristiti taj argument, no vidimo da $d_p|2$ pa stupanj preslikavanja može biti 1 ili 2. No u [35] dokazano je da je za $p \geq 3$ to preslikavanje također biracionalna ekvivalencija ([35],Lema 5-5).

Teorem 4.4 *Neka je $p \geq 2$ prost broj. Krivulja C_p je biracionalno ekvivalentna s $X_0(p)$.*

Krivulja C_p ima vrlo velik stupanj, Tablica 4.1 daje vrijednosti $\Psi(N)$ za neke vrijednosti broja N. Također, polinomi imaju vrlo velike cjelobrojne koeficijente. Na primjer, polinom krivulje C_5 je jednak

$$\begin{aligned}
P(x_0, x_1, x_2) = x_0^6 &- 9433593750x_0^5x_2 + 587500000x_0^4x_1x_2 - 2587500x_0^3x_1^2x_2 + 3000x_0^2x_1^3x_2 \\
&- x_0x_1^4x_2 + 29664516448974609375x_0^4x_2^2 + 13223876953125000000x_0^3x_1x_2^2 \\
&+ 1243896484375000x_0^2x_1^2x_2^2 + 29296875000x_0x_1^3x_2^2 \\
&- 3109516575932502746582031250 0x_0^3x_2^3 + 1291394233703613281250000 0x_0^2x_1x_2^3 \\
&- 246763229370117187500x_0x_1^2x_2^3 + 28290287445997819304466247558593 75x_0^2x_2^4 \\
&+ 5471520125865936279296875000 00x_0x_1x_2^4 \\
&- 8579803534303209744393825531005859375 0x_0x_2^5 \\
&+ 8673617379884035472059622406959533691406 25x_2^6,
\end{aligned}$$

a na Slici 4.1 prikazana je afina krivulja određena s $P(x_0/x_2, x_1/x_2)$.



Slika 4.1: Krivulja C_5

Tablica 4.1: Neke vrijednosti funkcije $\Psi(N)$

N	p	12	18	24	30	32	42	54	60
$\Psi(N)$	p+1	24	36	48	72	48	96	108	144

Funkcije Δ, Δ_N i E_4^3 su modularne forme težine 12 za grupe $\Gamma(N)$ i $\Gamma_1(N)$ pa možemo definirati preslikavanja $\varphi : X(N) \to \mathbb{P}^2$ i $\varphi_1 : X_1(N) \to \mathbb{P}^2$ istom formulom

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{a}_z) =& (\Delta(z) : E_4^3(z) : \Delta_N(Z)), \quad \mathbf{a}_z \in X(N),\\ \varphi_1(\mathbf{a}_z) =& (\Delta(z) : E_4^3(z) : \Delta_N(Z)), \quad \mathbf{a}_z \in X_1(N).\end{aligned}$$

U slučaju kada je N prost broj, preslikavanje s $X_0(N)$ je stupnja 1, pa je po Propoziciji 3.12 preslikavanje φ stupnja $N\Phi(N)$, a preslikavanje φ_1 je stupnja N (po (1.15) i (1.17)). Za općenit N, algoritmom su provjereni stupnjevi preslikavanja, odnosno stupnjevi dobivenih krivulja i rezultati se podudaraju s navedenim za sve $N \leq 40$.

4.2 Slučaj $N = p$

Budući da prost broj p ima dva djelitelja, 1 i p, svaki η-kvocijent u $M_k(\Gamma_0(p))$ je oblika $\eta(z)^{r_1}\eta(pz)^{r_p}$, za neke $r_1, r_p \in \mathbb{Z}$, kao što smo vidjeli u točki §2.3. No ako unaprijed znamo težinu te modularne forme, tada imamo $r_1 + r_p = 2k$ i možemo izraziti r_p preko r_1.

Dakle, η-kvocijent u $M_k(\Gamma_0(p))$ je oblika

$$\eta(z)^r\eta(pz)^{2k-r}$$

pri čemu vrijedi:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{24}(r + p(2k-r)) = a, \quad a \in \left\{0, 1, \ldots, \frac{k(p+1)}{12}\right\} \\ &\frac{1}{24}(pr + 2k - r) = b, \quad b = \frac{k(p+1)}{12} - a \\ &r \equiv 0 \pmod 2,\end{aligned} \tag{4.2}$$

gdje smo dodatno uzeli u obzir čemu može biti jednak red u kuspovima tog η-kvocijenta u prvoj i drugoj jednadžbi.

Ovi uvjeti omogućuju pisanje algoritma koji vraća sve η-kvocijente u $M_k(\Gamma_0(p))$, algoritam se nalazi u Dodatku. Algoritam računa vrijednosti broja r iz prve dvije jednadžbe u (4.2) te provjerava treći uvjet.

Koristeći taj algoritam, tražimo η-kvocijente u $M_k(\Gamma_0(p))$ za $k = 2, 4, 6, 12$.

4.2.1 Težina 2

Uvjeti Leme 2.19 govore da η-kvocijenti postoje u $M_2(\Gamma_0(p))$ ukoliko je $p \equiv 3 \pmod 4$ i $p \equiv 2 \pmod 3$, odnosno tada je $p \equiv 11 \pmod{12}$. U tom slučaju, imamo

$$\eta(z)^2\eta(pz)^2 \in M_2(\Gamma_0(p)).$$

Provjerimo da ovaj kvocijent zadovoljava uvjete Teorema 2.6.

$$r_1 + r_p = 2 + 2 = 2 \cdot 2$$

$$r_1 + pr_p = 2 + 2p = 2(p+1) \equiv 0 \pmod{24} \text{ jer je } p \equiv 11 \pmod{12}$$

$$pr_1 + r_p = 2(p+1) \equiv 0 \pmod{24}$$

$$p^{r_p} = p^2 \text{ je kvadrat cijelog broja.}$$

Algoritam koji traži η-kvocijente nije našao niti jedan drugi kvocijent težine 2 za $p = 11, 23, 47, 59, 71, 83, 107, 131, 167, 179, 191$.

Dakle, ne možemo naći dovoljno η-kvocijenata u $M_2(\Gamma_0(p))$ da bismo konstruirali preslikavanje u $\mathbb{P}^2$.

4.2.2 Težina 4

Uvjete Leme 2.19 govore da u $M_4(\Gamma_0(p))$ postoje η-kvocijenti ako je $p \equiv 2 \pmod 3$. Uz dodatnu pretpostavku da je $p > 2$ vrijedi $p \equiv 5 \pmod 6$. U tom slučaju je

$$\eta(z)^4\eta(pz)^4 \in M_4(\Gamma_0(p)).$$

Provjerimo da ovaj kvocijent zadovoljava uvjete Teorema 2.6:

$$r_1 + r_p = 4 + 4 = 2 \cdot 4$$

$$r_1 + pr_p = 4 + 4p = 4(p+1) \equiv 0 \pmod{24} \text{ jer je } p \equiv 5 \pmod 6$$

$$pr_1 + r_p = 4(p+1) \equiv 0 \pmod{24}$$

$$p^{r_p} = p^4 \text{ je kvadrat cijelog broja.}$$

Koristeći algoritam koji daje η-kvocijente u $M_4(\Gamma_0(p))$ nije nađen nijedan drugi η-kvocijent za $p = 17, 23, 29, 41, 47, 53, 59, 71, 83, 89$.

Ako broj p zadovoljava i $p \equiv 1 \pmod 4$, što vrijedi u slučaju $p = 5, 17, 29, 41, 53, 89, 101, ...,$ tada su funkcije

$$\frac{\eta(z)^{10}}{\eta(pz)^2}, \quad \frac{\eta(pz)^{10}}{\eta(z)^2},$$

slabo holomorfne na $\Gamma_0(p)$, no vrijedi

$$\operatorname{div}\left(\frac{\eta(z)^{10}}{\eta(pz)^2}\right) = \frac{-p+5}{12}\mathbf{a}_\circ + \frac{5p-1}{12}\mathbf{a}_\infty,$$
$$\operatorname{div}\left(\frac{\eta(pz)^{10}}{\eta(z)^2}\right) = \frac{5p-1}{12}\mathbf{a}_\circ + \frac{-p+5}{12}\mathbf{a}_\infty,$$

a $-p+5 < 0$ za $p > 5$. Dakle, one imaju polove u kuspovima ako je $p > 5$.

Forme $\eta(z)^4\eta(pz)^4, \frac{\eta(z)^{10}}{\eta(pz)^2}$ i $\frac{\eta(pz)^{10}}{\eta(z)^2}$ su linearno nezavisne jer su im redovi u kuspu ∞ redom $\frac{p+1}{6}, \frac{5p-1}{12}, \frac{-p+5}{12}$, a ti su brojevi različiti za sve proste brojeve p.

U slučaju $p = 5$ te su funkcije holomorfne u kuspovima, to jest one su u $M_4(\Gamma_0(5))$. Te funkcije su linearno nezavisne i pomoću njih možemo konstruirati preslikavanje $X_0(5) \to \mathbb{P}^2$.

Lema 4.5 *Preslikavanje $\varphi : X_0(5) \to \mathbb{P}^2$ definirano s*

$$\varphi(\boldsymbol{a}_z) = \left(\frac{\eta(z)^{10}}{\eta(5z)^2} : \eta(z)^4\eta(5z)^4 : \frac{\eta(5z)^{10}}{\eta(z)^2}\right)$$

je biracionalna ekvivalencija s krivuljom u $\mathbb{P}^2$ definiranom polinomom $-x_1^2 + x_0x_2$.

Dokaz.

Ako pogledamo formu

$$(\eta(z)^4\eta(5z)^4)^2 - \frac{\eta(z)^{10}}{\eta(5z)^2}\frac{\eta(5z)^{10}}{\eta(z)^2} = \eta(z)^8\eta(5z)^8 - \eta(z)^8\eta(5z)^8 = 0,$$

zaključujemo da je slika preslikavanja krivulja određena jednadžbom $x_1^2 - x_0x_2$, stupanj te krivulje jednak je 2. Divizori su po Lemi 2.14 jednaki

$$\operatorname{div}\left(\frac{\eta(z)^{10}}{\eta(5z)^2}\right) = 2\mathbf{a}_\circ$$
$$\operatorname{div}(\eta(z)^4\eta(5z)^4) = \mathbf{a}_\circ + \mathbf{a}_\infty$$
$$\operatorname{div}\left(\frac{\eta(5z)^{10}}{\eta(z)^2}\right) = 2\mathbf{a}_\infty$$

pa je desna strana jednakosti u (3.7) iz Teorema 3.9 jednaka je $\dim M_4(\Gamma_0(5))+g(\Gamma_0(5))-1=2$. Koristeći formulu (3.7) iz Teorema 3.9 zaključujemo da je preslikavanje φ biracionalna ekvivalencija.

□

Algoritam nije našao nijedan drugi η-kvocijent za $p = 17, 23, 29, 41, 47, 53, 59, 71, 83, 89, 101$.

Dakle, ne možemo naći dovoljno η-kvocijenta težine 4 za $p > 5$.

4.2.3 Težina 6

Prema Lemi 2.19, η-kvocijenti težine 6 za $\Gamma_0(p)$ postoje u slučaju $p \equiv 3 \pmod 4$. Tada uvijek postoji kvocijent

$$\eta(z)^6\eta(pz)^6 \in M_6(\Gamma_0(p)).$$

Provjerimo da ovaj kvocijent zadovoljava uvjete Teorema 2.6:

$$r_1 + r_p = 6 + 6 = 2 \cdot 6$$

$$r_1 + pr_p = 6 + 6p = 6(p+1) \equiv 0 \pmod{24} \text{ jer je } p \equiv 3 \pmod 4$$

$$pr_1 + r_p = 6(p+1) \equiv 0 \pmod{24}$$

$$p^{r_p} = p^6 \text{ je kvadrat cijelog broja.}$$

Za $p = 11, 23, 47, 59, 71, 83, 107, 131, 167, 179, 191$ to je jedini η-kvocijent težine 6.

Za $p = 3$ nađeni su i η-kvocijenti

$$\frac{\eta(z)^{18}}{\eta(3z)^6}, \quad \frac{\eta(3z)^{18}}{\eta(z)^6} \in M_6(\Gamma_0(3)).$$

Provjerimo da ovi kvocijenti zadovoljavaju uvjete Teorema 2.6. Za kvocijent $\frac{\eta(z)^{18}}{\eta(3z)^6}$ imamo:

$$r_1 + r_3 = 18 - 6 = 2 \cdot 6$$

$$r_1 + 3r_3 = 18 - 18 = 0$$

$$3r_1 + r_3 = 48$$

$$p^{r_p} = 3^{-6} \text{ je kvadrat racionalnog broja.}$$

Sličan račun vrijedi za drugi kvocijent.

Pogledajmo Fourierove razvoje ovih kvocijenata:

$$\frac{\eta(z)^{18}}{\eta(3z)^6} = 1 - 18q + 135q^2 - 504q^3 + 657q^4 + 2052q^5 - 10071q^6 + 12384q^7 + ...$$
$$\eta(z)^6\eta(3z)^6 = q - 6q^2 + 9q^3 + 4q^4 + 6q^5 - 54q^6 - 40q^7 + 168q^8 + ...$$
$$\frac{\eta(3z)^{18}}{\eta(z)^6} = q^2 + 6q^3 + 27q^4 + 80q^5 + 207q^6 + 432q^7 + 863q^8 + ...$$

Oni su linearno nezavisni po Lemi 2.8 jer počinju s različitim potencijama od q i možemo pomoću njih konstruirati preslikavanje u $\mathbb{P}^2$.

Lema 4.6 *Preslikavanje $\varphi : X_0(3) \to \mathbb{P}^2$ definirano s*

$$\varphi(\boldsymbol{a}_z) = \left(\frac{\eta(z)^{18}}{\eta(3z)^6} : \eta(z)^6\eta(3z)^6 : \frac{\eta(3z)^{18}}{\eta(z)^6}\right)$$

je biracionalna ekvivalencija s krivuljom u $\mathbb{P}^2$ definiranom polinomom $-x_1^2 + x_0x_2$.

Dokaz.

Ako pogledamo formu

$$(\eta(z)^6\eta(3z)^6)^2 - \frac{\eta(z)^{18}}{\eta(3z)^6}\frac{\eta(3z)^{18}}{\eta(z)^6} = \eta(z)^{12}\eta(3z)^{12} - \eta(z)^{12}\eta(3z)^{12} = 0,$$

zaključujemo da je slika preslikavanja krivulja određena jednadžbom $x_1^2 - x_0x_2$, stupanj te krivulje jednak je 2. Divizori su jednaki

$$\operatorname{div}\left(\frac{\eta(z)^{18}}{\eta(3z)^6}\right) = 2\mathbf{a}_o$$
$$\operatorname{div}(\eta(z)^6\eta(3z)^6) = \mathbf{a}_o + \mathbf{a}_\infty$$
$$\operatorname{div}\left(\frac{\eta(3z)^{18}}{\eta(z)^6}\right) = 2\mathbf{a}_\infty$$

pa je desna strana jednakosti u (3.7) iz Teorema 3.9 jednaka je $\dim M_6(\Gamma_0(3)) + g(\Gamma_0(3)) - 1 = 2$. Koristeći formulu (3.7) iz Teorema 3.9 zaključujemo da je preslikavanje φ biracionalna ekvivalencija.

□

Ako uvedemo dodatni uvjet $p \equiv 1 \pmod 6$, tada vrijedi

$$\eta(z)^6\eta(pz)^6, \quad \eta(z)^2\eta(pz)^{10}, \quad \eta(z)^{10}\eta(pz)^2 \in M_6(\Gamma_0(p)).$$

Provjerimo da ovi kvocijenti zadovoljavaju uvjete Teorema 2.6. Za kvocijent $\eta(z)^2\eta(pz)^{10}$ imamo:

$$
\begin{aligned}
&r_1 + r_p = 12 = 2 \cdot 6 \\
&r_1 + pr_p = 2 + 10p = 2(5p+1) \equiv 0 \pmod{24} \text{ jer je } 5p+1 \equiv 0 \pmod{4,6} \\
&pr_1 + r_p = 2p + 10 = 2(p+5) \equiv 0 \pmod{24} \text{ jer je } p+5 \equiv 0 \pmod{4,6} \\
&p^{r_p} = p^{10} \text{ je kvadrat cijelog broja.}
\end{aligned}
$$

Sličan račun vrijedi za drugi kvocijent. Osim ta tri kvocijenta, algoritam nije našao niti jedan drugi η-kvocijent težine 6 za $p = 19, 31, 43, 67, 79, 103, 127, 139, 151, 163, 199$.

Gledamo Fourierove razvoje

$$
\begin{aligned}
\frac{\eta(z)^2}{\eta(pz)^{10}} &= q^{\frac{5p+1}{12}} - 2q^{\frac{5p+1}{12}+1} - q^{\frac{5p+1}{12}+2} + 2q^{\frac{5p+1}{12}+3} + \ldots \\
\eta(z)^6\eta(pz)^6 &= q^{\frac{p+1}{4}} - 6q^{\frac{p+1}{4}+1} + 9q^{\frac{p+1}{4}+2} + 10q^{\frac{p+1}{4}+3} + \ldots \\
\frac{\eta(pz)^{10}}{\eta(z)^2} &= q^{\frac{p+5}{12}} - 10q^{\frac{p+5}{12}+1} + 35q^{\frac{p+5}{12}+2} - 30q^{\frac{p+5}{12}+3} + \ldots
\end{aligned}
$$

Budući da Fourierovi razvoji počinju s različitim potencijama od q za svaki $p > 1$, forme su linearno nezavisne po Lemi 2.8.

Pogledajmo preslikavanje definirano pomoću ove tri modularne forme.

Teorem 4.7 *Neka je p prost broj koji zadovoljava*

$$p \equiv 3 \pmod{4} \text{ } i \text{ } p \equiv 1 \pmod{6}.$$

Preslikavanje $\varphi : X_0(p) \to \mathbb{P}^2$ definirano s

$$\varphi(\boldsymbol{a}_z) = (\eta(z)^2\eta(pz)^{10} : \eta(z)^6\eta(pz)^6 : \eta(z)^{10}\eta(pz)^2)$$

je stupnja $\frac{p-1}{6}$. U slučaju $p = 7$, preslikavanje je biracionalna ekivalencija.

Dokaz.

Vrijedi

$$(\eta(z)^6\eta(pz)^6)^2 - \eta(z)^2\eta(pz)^{10}\eta(z)^{10}\eta(pz)^2 = \eta(z)^{12}\eta(pz)^{12} - \eta(z)^{12}\eta(pz)^{12} = 0$$

pa je slika preslikavanja φ krivulja određena polinomom $x_1^2 - x_0x_2$, ta krivulja ima stupanj 2.

Divizori su jednaki

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\left(\eta(z)^2\eta(pz)^{10}\right) &= \frac{p+5}{12}\mathbf{a}_0 + \frac{5p+1}{12}\mathbf{a}_\infty \\
\operatorname{div}(\eta(z)^6\eta(pz)^6) &= \frac{p+1}{4}\mathbf{a}_0 + \frac{p+1}{4}\mathbf{a}_\infty \\
\operatorname{div}\left(\eta(z)^{10}\eta(pz)^2\right) &= \frac{5p+1}{12}\mathbf{a}_0 + \frac{p+5}{12}\mathbf{a}_\infty
\end{aligned}$$

pa je minimum divizora iz formule (3.7) iz Teorema 3.9 jednak $2 \cdot \frac{p+5}{12} = \frac{p+5}{6}$. Koristeći Teorem 1.18 i Teorem 1.15 računamo

$$\begin{aligned}
\dim M_k(\Gamma_0(N)) + g(\Gamma_0(N)) - 1 = \frac{k\,[\Gamma(1):\Gamma_0(N)]}{12} + \\
\left(\left\lfloor\frac{k}{4}\right\rfloor - \frac{k}{4}\right)\nu_2(\Gamma_0(N)) + \left(\left\lfloor\frac{k}{3}\right\rfloor - \frac{k}{3}\right)\nu_3(\Gamma_0(N))
\end{aligned} \tag{4.3}$$

U našem slučaju $k = 6$ i nema eliptičkih točaka reda 2 pa imamo

$$\dim M_6(\Gamma_0(p)) + g(\Gamma_0(p)) - 1 = \frac{p+1}{2}.$$

Dakle, desna strana formule (3.7) iz Teorema 3.9 jednaka je

$$\frac{p+1}{2} - \frac{p+5}{6} = \frac{2p-2}{6}.$$

Iz formule (3.7) iz Teorema 3.9 slijedi da je stupanj preslikavanja φ jednak $\frac{p-1}{6}$.

□

Uvjeti Teorema 4.7 zadovoljeni su za $p = 7, 19, 31, 43, 67, 79, 103, 127, 139, 151...$

4.2.4 Težina 12

Kada je $p > 2$ prost broj, tada postoje sljedeća tri $\eta-$kvocijenta u $M_{12}(\Gamma_0(p))$:

$$\eta(z)^{24} = \Delta(z), \quad \eta(pz)^{24} = \Delta_p(z) \quad \text{i} \quad \eta(z)^{12}\eta(pz)^{12}.$$

Za $\Delta(z)$ i $\Delta_p(z)$ već znamo da su modularne forme na $\Gamma_0(p)$ (Korolar 2.12), a za $\eta(z)^{12}\eta(pz)^{12}$ imamo

$r_1 + r_p = 24 = 2 \cdot 12$

$r_1 + pr_p = pr_1 + r_p = 12(p+1) \equiv 0 \pmod{24}$ jer je p neparan prost broj

$p^{r_p} = p^{12}$ je kvadrat cijelog broja.

Možemo izračunati njihove divizore s obzirom na $\Gamma_0(p)$,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\Delta(z)) &= p\mathbf{a}_\circ + \mathbf{a}_\infty \\ \operatorname{div}(\Delta_p(z)) &= \mathbf{a}_\circ + p\mathbf{a}_\infty \\ \operatorname{div}(\eta(z)^{12}\eta(pz)^{12}) &= \frac{p+1}{2}\mathbf{a}_\circ + \frac{p+1}{2}\mathbf{a}_\infty\end{aligned}$$

Da bismo provjerili linearnu nezavisnost gledamo njihove Fourierove razvoje u kuspu ∞

$$\begin{aligned}\Delta(z) &= q - 24q^2 + 252q^3 - 1427q^4 + ... \\ \Delta_p(z) &= q^p - 24q^{2p} + 252q^{3p} - 1427q^{4p} \\ \eta(z)^{12}\eta(pz)^{12} &= q^{\frac{p+1}{2}} - 12q^{\frac{p+1}{2}+1} + 54q^{\frac{p+1}{2}+2} - 88q^{\frac{p+1}{2}+3} - 99q^{\frac{p+1}{2}+4} + ...\end{aligned}$$

Zaključujemo da su ove modularne forme linearno nezavisne za $p > 2$ po Lemi 2.8.

Teorem 4.8 *Neka je $p > 2$ prost broj. Preslikavanje $\varphi : X_0(p) \to \mathbb{P}^2$ definirano s*

$$\varphi(\boldsymbol{a}_z) = (\Delta(z) : \eta(z)^{12}\eta(pz)^{12} : \Delta_p(z))$$

je stupnja $\frac{p-1}{2}$.

Dokaz. Vrijedi

$$(\eta(z)^{12}\eta(pz)^{12})^2 - \Delta(z)\Delta_p(z) = 0$$

pa je slika preslikavanja φ krivulja određena polinomom $x_1^2 - x_0x_2$, ta krivulja ima stupanj 2.

Minimum divizora iz formule (3.7) iz Teorema 3.9 jednak je 2. Iz formule (4.3) slijedi

$$\dim M_{12}(\Gamma_0(p)) + g(\Gamma_0(p)) - 1 = p + 1.$$

Dakle, desna strana formule (3.7) iz Teorema 3.9 jednaka je $p - 1$.

Iz formule (3.7) iz Teorema 3.9 slijedi da je stupanj preslikavanja φ jednak $\frac{p-1}{2}$.

□

4.3 Jedan model s η-kvocijentima težine 12

Već je spomenuto da uvijek postoje dva η-kvocijenta težine 12 u $M_{12}(\Gamma_0(N))$, Δ i Δ_N. Nama su potrebne tri linearno nezavisne modularne forme, pa želimo naći neki treći η-kvocijent u $M_{12}(\Gamma_0(N))$. Budući da stupanj preslikavanja ovisi o divizorima to jest o nulama modularnih formi, svojstvo koje ćemo gledati bit će red u kuspu ∞.

Red modularne forme u kuspu ∞ proučava se u članku [1], te u [32], [33]. Ako s $m_{N,k}$ označimo maksimalan red nultočke modularne forme iz $M_k(\Gamma_0(N))$ u kuspu ∞, poznato je da vrijedi:

$$\dim M_k(\Gamma_0(N)) - 1 \leq m_{N,k} \leq \frac{k\,[\Gamma(1) : \Gamma_0(N)]}{12} \tag{4.4}$$

U [32], Lema 2-4 i [33], Teorem 1-3 dokazana je slična ograda za kusp forme na nekoj Fuchsovoj grupi prve vrste. Gornja ograda slijedi iz Sturmove ocjene, Korolar 1.21, a donja ograda u (4.4) slijedi iz sljedeće tvrdnje. Prostor $M_k(\Gamma_0(N))$ je konačno-dimenzionalan vektorski prostor dimenzije d i ima bazu $\{f_1, \dots, f_d\}$, pri čemu su f_i forme s cjelobrojnim Fourierovim koeficijentima i razvojima oblika

$$f_i(z) = a_i q^{c_i} + \mathcal{O}(q^{c_i+1}),$$

pri čemu je $c_1 < c_2 < \cdots < c_d$. Očito je c_d maksimalni red nule u kuspu ∞ i manji je od d.

U [1] dani su primjeri prostora za koje se postiže donja i prostora za koje se postiže gornja granica, tako da je pojam maksimalnog reda u kuspu ∞ još uvijek prilično misteriozan. U našim primjerima modularnih formi s nulom maksimalnog reda u kuspu ∞ bit će postignuta gornja ograda.

Ako modularnoj formi pridružimo cjelobrojni divizor kao u Lemi 1.23 (v), tada dobivamo bolju ocjenu

$$m_{N,k} \leq \dim M_k(\Gamma_0(N)) + g(\Gamma_0(N)) - 1.$$

Za $k = 12$ iz (4.3) slijedi

$$\frac{k\,[\Gamma(1) : \Gamma_0(N)]}{12} = \dim M_{12}(\Gamma_0(N)) + g(\Gamma_0(N)) - 1.$$

Sljedeća tvrdnja može se naći za slučaj kusp formi u [32], Lema 2-4 ili [33], Lema 4-2 (ii).

Lema 4.9 *Uvijek postoji jedinstvena normalizirana modularna forma maksimalnog reda u kuspu ∞.*

Dokaz. Pretpostavimo da su f_1,f_2 normalizirane forme takve da su im redovi jednaki $m_{N,k}$. Neka su im dani Fourierovi razvoji

$$f_i(z) = q^{m_{N,k}} + a_{m_{N,k}+1,i}q^{m_{N,k}+1} + \ldots, \quad i = 1, 2.$$

Tada je $f_1(z) - f_2(z) = (a_{m_{N,k}+1,1} - a_{m_{N,k}+1,2})q^{m_{N,k}+1} + \cdots = 0.$

□

Već je pokazano da je svaka modularna forma koja nema nula na $\mathbb{H}$, a ima cjelobrojne koeficijente u Fourieovom razvoju η-kvocijent. U članku [8], Lema 2.1 pokazano je da u slučaju kada je genus od $\Gamma_0(N)$ jednak 0, jedinstvena normalizirana forma težine 12 je η-kvocijent. Te su forme dane Tablicom 4.2, pri čemu je ta jedinstvena forma težine 12 s nulom maksimalnog reda u kuspu ∞ označena s $\Delta_{N,12}$:

Tablica 4.2: Tablica 1 iz [8]

N	$\Delta_{N,12}$
1	$\eta(z)^{24}$
2	$\eta(2z)^{48}\eta(z)^{-24}$
3	$\eta(3z)^{36}\eta(z)^{-12}$
4	$\eta(4z)^{48}\eta(2z)^{-24}$
5	$\eta(5z)^{30}\eta(z)^{-6}$
6	$\eta(6z)^{72}\eta(z)^{12}\eta(2z)^{-24}\eta(3z)^{-36}$
7	$\eta(7z)^{28}\eta(z)^{-4}$
8	$\eta(8z)^{48}\eta(4z)^{-24}$
9	$\eta(9z)^{36}\eta(3z)^{-12}$
10	$\eta(10z)^{60}\eta(z)^{6}\eta(2z)^{-12}\eta(5z)^{-30}$
12	$\eta(12z)^{72}\eta(2z)^{12}\eta(6z)^{-36}\eta(4z)^{-24}$
13	$\eta(13z)^{26}\eta(z)^{-2}$
16	$\eta(16z)^{48}\eta(8z)^{-24}$
18	$\eta(18z)^{72}\eta(3z)^{12}\eta(6z)^{-36}\eta(9z)^{-24}$
25	$\eta(25z)^{30}\eta(5z)^{-6}$

Sljedeći teorem proširuje tu tvrdnju.

Teorem 4.10 *Jedinstvena normalizirana modularna forma težine 12 na $\Gamma_0(N)$ koja ima nulu maksimalnog reda u kuspu ∞ je η-kvocijent ako broj N pripada jednom od skupova*

$$S_1 = \{p^n : p \in \{2,3,5,7,13\}, n \geq 1\}$$
$$S_2 = \{p_1^{n_1} p_2^{n_2} : p_1 \in \{2,3,5\}, p_2 \in \{3,5,7,13\}, p_1 p_2 < 40, n_1, n_2 \geq 1\}$$
$$S_3 = \{p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} : p_1 = 2, p_2 \in \{3,5\}, p_3 \in \{5,7,13\}, p_2 + p_3 < 17, n_1, n_2, n_3 \geq 1\}.$$

U tom slučaju taj η-kvocijent je jednak:

(i)

$$\frac{\eta(p^n z)^{pr}}{\eta(p^{n-1} z)^r}$$

kada je $N \in S_1$, pri čemu je $r = \frac{24}{p-1}$,

(ii)

$$\frac{\eta(p_1^{n_1-1} p_2^{n_2-1} z)^r \eta(p_1^{n_1} p_2^{n_2} z)^{p_1 p_2 r}}{\eta(p_1^{n_1} p_2^{n_2-1} z)^{p_1 r} \eta(p_1^{n_1-1} p_2^{n_2} z)^{p_2 r}}$$

kada je $N \in S_2$, pri čemu je

$$r = \frac{24}{(p_1 - 1)(p_2 - 1)}$$

(iii)

$$\frac{\eta(p_1^{n_1} p_2^{n_2-1} p_3^{n_3-1} z)^{p_1 r} \eta(p_1^{n_1-1} p_2^{n_2} p_3^{n_3-1} z)^{p_2 r} \eta(p_1^{n_1-1} p_2^{n_2-1} p_3^{n_3} z)^{p_3 r} \eta(p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} z)^{p_1 p_2 p_3 r}}{\eta(p_1^{n_1-1} p_2^{n_2-1} p_3^{n_3-1} z)^r \eta(p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3-1} z)^{p_1 p_2 r} \eta(p_1^{n_1} p_2^{n_2-1} p_3^{n_3} z)^{p_1 p_3 r} \eta(p_1^{n_1-1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} z)^{p_2 p_3 r}}$$

kada je $N \in S_3$, pri čemu je

$$r = \frac{24}{(p_1 - 1)(p_2 - 1)(p_3 - 1)}.$$

Dokaz. Neka je dan rastav broja N, $N = p_1^{n_1} \dots p_s^{n_s}$, $p_1 < p_2 < \cdots < p_s$. Zapišimo koeficijente traženog η-kvocijenta u vektor stupac $\mathbf{r}_\delta$, uređen po veličini. Matrica valuacije A_N jednaka je Kroneckerovom produktu matrica, $A_N = A_{p_1^{n_1}} \bigotimes \cdots \bigotimes A_{p_s^{n_s}}$. Onaj η-kvocijent koji ima nulu največeg reda u kuspu ∞ je cjelobrojno rješenje sustava:

$$A_N \mathbf{r}_\delta = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p_1^{n_1-1} \cdots p_s^{s_1-1}(p_1+1)\cdots(p_s+1) \end{pmatrix},$$

odnosno vektor $\mathbf{r}_\delta$ jednak je umnošku

$$A_N^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p_1^{n_1-1}\cdots p_s^{s_1-1}(p_1+1)\cdots(p_s+1)\end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Matrica A_N^{-1} jednaka je Kroneckerovom produktu inverza matrica $A_{p_i^{n_i}}$. Općenito, za prost broj p, matrica A_{p^n} je veličine $(n+1)\times(n+1)$ i dana sa

$$24\cdot A_{p^n}(i,j)=\begin{cases}\frac{p^n}{p^{\min\{i,n-i\}}}, & i=j\\ \frac{p^n}{p^{j-i}p^{\min\{i,n-i\}}}, & i<j\\ \frac{p^n}{p^{i-j}p^{\min\{i,n-i\}}}, & i>j\end{cases}$$

a njen je inverz tridijagonalna matrica dana sa

$$\frac{1}{p^{n-1}(p^2-1)}\cdot A_{p^n}^{-1}(i,j)=24\begin{cases} p, & i=j=1 \text{ ili } i=j=n+1\\ -p^{\min\{j-1,n+1-j\}}, & |i-j|=1\\ (p^2+1)p^{\min\{j-2,n+1-j\}}, & 0<i=j<n+1\\ 0, & \text{inače}\end{cases}$$

to jest

$$\frac{1}{24}A_{p^n}^{-1}=\frac{1}{p^{n-1}(p^2-1)}\begin{pmatrix} p & -p & & & & & \\ -1 & p^2+1 & -p^2 & & & 0 & \\ & -p & p(p^2+1) & -p^3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & & -p^2 & p^2+1 & -1 \\ & & & & & -p & p\end{pmatrix}$$

Zanima nas zadnji stupac matrice A_N. Taj stupac ima nule osim na 2^s mjesta. Prvi ne-nul unos jednak je $(-1)^s$ i iz (4.5) daje jednadžbu

$$r_{p_1^{n_1-1}\cdots p_s^{n_s-1}}=\frac{(-1)^s 24}{(p_1-1)\cdots(p_s-1)}.$$

Zahtjevamo $r_{p_1^{n_1-1}\cdots p_s^{n_s-1}}\in\mathbb{Z}$, što povlači da je $s<4$.

Za $s=1$ iz (4.5) dobivamo jednadžbe

$$r_1=r_p=\cdots=r_{p^{n-2}}=0$$
$$r_{p^{n-1}}=\frac{-24}{p-1}$$
$$r_{p^n}=\frac{24p}{p-1}$$

Budući da je $r_{p^{n-1}} \in \mathbb{Z}$, dobivamo da je nužno $p = 2, 3, 5, 7, 13$, to jest $N \in S_1$.

Za $s = 2$ dobivamo

$$\begin{aligned}
&r_{p_1^i p_2^j} = 0, \text{ kada je } i < n_1 - 1 \text{ ili } j < n_2 - 1\\
&r_{p_1^{n_1-1} p_2^{n_2-1}} = \frac{24}{(p_1-1)(p_2-1)} = x\\
&r_{p_1^{n_1-1} p_2^{n_2}} = -p_2 x\\
&r_{p_1^{n_1} p_2^{n_2-1}} = -p_1 x\\
&r_{p_1^{n_1} p_2^{n_2}} = p_1 p_2 x
\end{aligned}$$

Iz uvjeta $r_{p_1^{n_1-1} p_2^{n_2-1}} \in \mathbb{Z}$ slijedi da N mora pripadati skupu S_2.

Za $s = 3$ imamo sljedeće jednadžbe:

$$\begin{aligned}
&r_{p_1^i p_2^j p_3^k} = 0, \text{ ako je } i < n_1 - 1 \text{ ili } j < n_2 - 1 \text{ ili } k < n_3 - 1\\
&r_{p_1^{n_1-1} p_2^{n_2-1} p_3^{n_3-1}} = \frac{-24}{(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)} = x\\
&r_{p_1^{n_1} p_2^{n_2-1} p_3^{n_3-1}} = -p_1 x, \quad r_{p_1^{n_1-1} p_2^{n_2} p_3^{n_3-1}} = -p_2 x, \quad r_{p_1^{n_1-1} p_2^{n_2-1} p_3^{n_3}} = -p_3 x\\
&r_{p_1^{n_1-1} p_2^{n_2} p_3^{n_3}} = p_2 p_3 x, \quad r_{p_1^{n_1} p_2^{n_2-1} p_3^{n_3}} = p_1 p_3 x, \quad r_{p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3-1}} = p_1 p_2 x\\
&r_{p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3}} = -p_1 p_2 p_3 x
\end{aligned}$$

Budući da mora vrijediti $r_{p_1^{n_1-1} p_2^{n_2-1} p_3^{n_3-1}} \in \mathbb{Z}$, vidimo da su mogućnosti samo

$$(p_1, p_2, p_3) = (2,3,5), (2,3,7), (2,3,13), (2,5,7),$$

odnosno N pripada skupu S_3.

Označimo $r = \frac{24}{p-1}$ za $p \in \{2, 3, 5, 7, 13\}$ i za funkciju $\Delta_{p^n,12}(z) = \frac{\eta(p^n z)^{24+r}}{\eta(p^{n-1} z)^r}$ provjerimo uvjete Teorema 2.6. Računamo

$$\sum_{\delta | N} \delta r_\delta = -p^{n-1} r + p^n(24 + r) = p^{n-1}((p-1)r + 24p) = 24(p+1)p^{n-1}.$$

Red u kuspu ∞ iznosi $1/24 \sum_\delta \delta r_\delta = (p+1)p^n$ pa po formuli valencije (Teorem 1.20) vidimo da ova funkcija ima nultočku maksimalnog reda u kuspu ∞ budući da je indeks podgrupe $\Gamma_0(p^n)$ jednak $(p+1)p^{n-1}$. Provjerimo i ostale uvjete:

$$\sum_{\delta|N} \delta' r_\delta = -pr + 24 + r = \frac{24}{p-1}(1-p) + 24 = 0 \text{ (red u kuspu } \mathfrak{o} \text{ je jednak 0)}$$

$$\prod_{\delta|N} \delta^{r_\delta} = p^{-r(n-1)} p^{n(24-r)} = p^{-2rn+r+24n} \text{ je kvadrat cijelog broja jer je } r \text{ paran broj}$$

$$\sum_{\delta|N} r_\delta = -r + 24 + r = 2 \cdot 12$$

Time smo dokazali da je $\Delta_{p^n,12} \in M_{12}(\Gamma_0(p^n))$ s nulom najvećeg reda u kuspu ∞.

Za funkciju

$$\Delta_{p_1^{n_1}p_2^{n_2},12}(z) = \frac{\eta(p_1^{n_1-1}p_2^{n_2-1}z)^r \eta(p_1^{n_1}p_2^{n_2}z)^{p_1p_2r}}{\eta(p_1^{n_1}p_2^{n_2-1}z)^{p_1r}\eta(p_1^{n_1-1}p_2^{n_2}z)^{p_2r}}$$

provjerimo uvjete Teorema 2.6, pri čemu je $r = \frac{24}{(p_1-1)(p_2-1)}, p_1, p_2 \in \{2,3,5,7,13\}$.

Računamo

$$\begin{aligned}\sum_{\delta|N} \delta r_\delta &= p_1^{n_1-1}p_2^{n_2-1}r(1 + p_1^2p_2^2 - p_1^2 - p_2^2)\\ &= p_1^{n_1-1}p_2^{n_2-1}\frac{24}{(p_1-1)(p_2-1)}(p_1+1)(p_1-1)(p_2+1)(p_2-1)\\ &= 24p_1^{n_1-1}p_2^{n_2-1}(p_1+1)(p_2+1)\end{aligned}$$

Red u kuspu ∞ iznosi $1/24\sum_\delta \delta r_\delta = p_1^{n_1-1}p_2^{n_2-1}(p_1+1)(p_2+1)$ pa po formuli valencije (Teorem 1.20) vidimo da ova funkcija ima nultočku maksimalnog reda u kuspu ∞ budući da je indeks podgrupe $\Gamma_0(p_1^{n_1}p_2^{n_2})$ jednak $p_1^{n_1-1}p_2^{n_2-1}(p_1+1)(p_2+1)$. Provjerimo i ostale uvjete:

$$\sum_{\delta|N} \delta' r_\delta = p_1p_2r + p_1p_2r - p_1p_2r - p_1p_2r = 0$$

$$\sum_{\delta|N} r_\delta = r(1 + p_1p_2 - p_1 - p_2) = \frac{24}{(p_1-1)(p_2-1)}(p_1-1)(p_2-1) = 24.$$

Dakle, red u kuspu $\mathfrak{o}$ jednak je 0 i težina kvocijenta $\Delta_{p_1^{n_1}p_2^{n_2},12}(z)$ jednaka je 12. Provjerimo i četvrti uvjet:

$$\begin{aligned}\prod_{\delta|N} \delta^{r_\delta} &= (p_1p_2)^r p_2^{-p_1r}p_1^{-p_2r} = p_1^{r(1-p_2)}p_2^{r(1-p_1)}\\ &= p_1^{\frac{-24}{p_1-1}}p_2^{\frac{-24}{p_2-1}}.\end{aligned}$$

Budući da su $p_1, p_2 \in \{2,3,5,7,13\}$, brojevi $\frac{-24}{p_1-1}$ i $\frac{-24}{p_2-1}$ su djeljivi s 2, pa zaključujemo da je $\prod_{\delta|N} \delta^{r_\delta}$ kvadrat racionalnog broja.

Time smo dokazali da je $\Delta_{p_1^{n_1}p_2^{n_2},12}(z) \in M_{12}(\Gamma_0(p_1^{n_1}p_2^{n_2}))$ s nulom najvećeg reda u kuspu ∞.

Neka je $N \in S_3$. Označimo $r = \frac{24}{(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)}$ i za funkciju

$$\Delta_{p_1^{n_1}p_2^{n_2}p_3^{n_3},12} = \frac{\eta(p_1^{n_1}p_2^{n_2-1}p_3^{n_3-1}z)^{p_1r}\eta(p_1^{n_1-1}p_2^{n_2}p_3^{n_3-1}z)^{p_2r}\eta(p_1^{n_1-1}p_2^{n_2-1}p_3^{n_3}z)^{p_3r}\eta(p_1^{n_1}p_2^{n_2}p_3^{n_3}z)^{p_1p_2p_3r}}{\eta(p_1^{n_1-1}p_2^{n_2-1}p_3^{n_3-1}z)^{r}\eta(p_1^{n_1}p_2^{n_2}p_3^{n_3-1}z)^{p_1p_2r}\eta(p_1^{n_1}p_2^{n_2-1}p_3^{n_3}z)^{p_1p_3r}\eta(p_1^{n_1-1}p_2^{n_2}p_3^{n_3}z)^{p_2p_3r}}$$

provjerimo uvjete Teorema 2.6. Računamo

$$\begin{aligned}
\sum_{\delta|N}\delta r_\delta &= p_1^{n_1-1}p_2^{n_2-1}p_3^{n_3-1}r(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_1^2p_2^2p_3^2-1-p_1^2p_2^2-p_1^2p_3^2-p_2^2p_3^2)\\
&= p_1^{n_1-1}p_2^{n_2-1}p_3^{n_3-1}\frac{24}{(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)}(p_1-1)(p_1+1)(p_2-1)(p_2+1)(p_3-1)(p_3+1)\\
&= 24p_1^{n_1-1}p_2^{n_2-1}p_3^{n_3-1}(p_1+1)(p_2+1)(p_3+1)
\end{aligned}$$

i vidimo da je red u kuspu ∞ jednak indeksu podgrupe $\Gamma_0(p_1^{n_1}p_2^{n_2}p_3^{n_3})$ te ova funkcija ima nulu maksimalnog reda u kuspu ∞. Provjerimo i ostale uvjete:

$$\begin{aligned}
\sum_{\delta|N}\delta' r_\delta &= r(p_1p_2p_3+p_1p_2p_3+p_1p_2p_3+p_1p_2p_3-p_1p_2p_3-p_1p_2p_3-p_1p_2p_3-p_1p_2p_3) = 0\\
\sum_{\delta|N}r_\delta &= r(p_1+p_2+p_3+p_1p_2p_3-1-p_1p_2-p_2p_3-p_1p_3) =\\
&= \frac{24}{(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)}(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1) = 24\\
\prod_{\delta|N}\delta^{r_\delta} &= (p_2p_3)^{p_1r}(p_1p_3)^{p_2r}(p_1p_2)^{p_3r}(p_1p_2p_3)^{-r}p_3^{-p_1p_2r}p_2^{-p_1p_3r}p_1^{-p_2p_3r}\\
&= p_1^{r(p_2+p_3-1-p_2p_3)}p_2^{r(p_1+p_3-1-p_1p_3)}p_3^{r(p_1+p_2-1-p_1p_1)}\\
&= p_1^{\frac{-24}{(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)}(p_2-1)(p_3-1)}p_2^{\frac{-24}{(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)}(p_1-1)(p_3-1)}p_3^{\frac{-24}{(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)}(p_1-1)(p_2-1)}\\
&= p_1^{\frac{-24}{(p_1-1)}}p_2^{\frac{-24}{(p_2-1)}}p_3^{\frac{-24}{(p_3-1)}}.
\end{aligned}$$

Budući da su $p_1, p_2, p_3 \in \{2,3,5,7,13\}$, brojevi $\frac{-24}{p_1-1}$, $\frac{-24}{p_2-1}$ i $\frac{24}{(p_3-1)}$ su djeljivi s 2, pa zaključujemo da je $\prod_{\delta|N}\delta^{r_\delta}$ kvadrat racionalnog broja.

Time smo dokazali da je $\Delta_{p_1^{n_1}p_2^{n_2}p_3^{n_3},12}(z) \in M_{12}(\Gamma_0(p_1^{n_1}p_2^{n_2}p_3^{n_3}))$ s nulom najvećeg reda u kuspu ∞.

□

Označimo s $\Delta_{N,12}$ funkciju iz Teorema 4.10. Ona ima nulu samo u kuspu ∞ maksimalnog reda pa je njen divizor s obzirom na grupu $\Gamma_0(N)$ jednak

$$\operatorname{div}(\Delta_{N,12}) = [\Gamma(1) : \Gamma_0(N)]\, \mathbf{a}_\infty = N \prod_{p|N}(1+1/p)\mathbf{a}_\infty.$$

Divizori formi Δ i Δ_N s obzirom na $\Gamma_0(N)$ jednaki su (Korolar 2.13)

$$\operatorname{div}(\Delta) = \sum_{c/d \in \mathcal{C}_N} \frac{N}{d(d, N/d)} \mathbf{a}_{\frac{c}{d}},$$
$$\operatorname{div}(\Delta_N) = \sum_{c/d \in \mathcal{C}_N} \frac{d}{(d, N/d)} \mathbf{a}_{\frac{c}{d}},$$

a red u kuspu ∞ je jednak

$$\nu_{\mathbf{a}_\infty}(\Delta) = 1, \quad \nu_{\mathbf{a}_\infty}(\Delta_N) = N.$$

Kada pogledamo divizore polova, vrijedi:

$$\deg\left(\operatorname{div}_\infty\left(\frac{\Delta}{\Delta_{N,12}}\right)\right) = N\prod_{p|N}(1+1/p) - 1, \tag{4.6}$$
$$\deg\left(\operatorname{div}_\infty\left(\frac{\Delta_N}{\Delta_{N,12}}\right)\right) = N\prod_{p|N}(1+1/p) - N. \tag{4.7}$$

Teorem 4.11 *Pretpostavimo da $N > 1$ leži u skupu S_1 iz Teorema 4.10, to jest N je oblika p^n za $p \in \{2,3,5,7,13\}$. Neka je $\Delta_{N,12}$ η-kvocijent iz Teorema 4.10. Tada je modularna krivulja $X_0(N)$ biracionalno ekvivalentna s krivuljom $C(\Delta_{N,12}, \Delta, \Delta_N) \subseteq \mathbb{P}^2$ koja je stupnja $p^{n-1}(p+1) - 1$.*

Dokaz. Vrijedi

$$\deg\left(\operatorname{div}_\infty\left(\frac{\Delta}{\Delta_{p^n,12}}\right)\right) = p^{n-1}(p+1) - 1$$
$$\deg\left(\operatorname{div}_\infty\left(\frac{\Delta_p^n}{\Delta_{p^n,12}}\right)\right) = p^{n-1}(p+1-p) = p^{n-1}.$$

Ovi brojevi su očito relativno prosti jer su jedini djelitelji drugog broja potencije od p, a one ne djele prvi broj za $n > 1$, a u slučaju $n = 1$ drugi broj je jednak 1 pa su brojevi relativno prosti.

Po Lemi 3.11 slijedi da je preslikavanje biracionalna ekvivalencija. Iz formule (3.7) iz Teorema 3.9 slijedi da je stupanj dobivene krivulje jednak $\dim M_{12}(\Gamma_0(N)) + g(\Gamma_0(N)) - 1 - 1$ jer je minimum divizora jednak 1. Iz formule (4.3) slijedi da je taj broj jednak

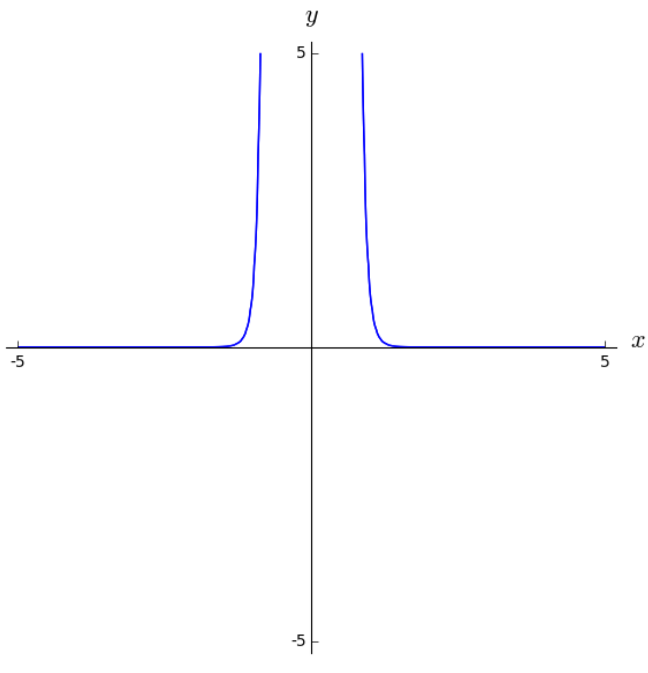
$p^{n-1}(p+1)-1.$ □

Sljedeća tablica sadrži definirajuće polinome za krivulje iz Teorema 4.11 za neke male vrijednosti broja N:

Tablica 4.3: Definirajući polinomi za neka preslikavanja iz Teorema 4.11

N=2	$x_0x_1 - x_2^2$
N=3	$x_0^2x_1 - x_2^3$
N=4	$x_0^3x_1^2 + 4096x_0^3x_1x_2 + 48x_0^2x_1x_2^2 - x_2^5$
N=5	$x_0^4x_1 - x_2^5$
N=7	$x_0^6x_1 - x_2^7$
N=9	$x_0^8x_1^3 + 531441x_0^8x_1^2x_2 + 282429536481x_0^8x_1x_2^2 + 27894275208x_0^7x_1x_2^3 - 756x_0^6x_1^2x_2^3$ $+975725676x_0^6x_1x_2^4 + 14171760x_0^5x_1x_2^5 + 74358x_0^4x_1x_2^6 + 72x_0^3x_1x_2^7 - x_2^{11}$
N=13	$x_0^{12}x_1 - x_2^{13}$

Primjer 4.12 *Pogledajmo krivulju* $C(\Delta_{13,12},\Delta,\Delta(13\cdot))$ *danu polinomom* $P(x_0,x_1,x_2) = x_0^{12}x_1 - x_2^{13}$. *Njen je stupanj jednak* 13, *a genus* 0. *Krivulja ima jednu singularnu točku* $(0:1:0)$ *koja je multipliciteta* 12. *Na Slici 4.2 možemo vidjeti ravninsku afinu krivulju, primjetimo da se singularna točka nalazi u beskonačnosti te afine ravnine* $x_2 = 1$.



Slika 4.2: Krivulja $C(\Delta_{13,12},\Delta,\Delta(13\cdot))$

Teorem 4.13 *Pretpostavimo da je N oblika 2^n3^m, 2^n5^m, 2^n13^m, 3^n5^m te $\Delta_{N,12}$ η-kvocijent iz Teorema 4.10. Tada je modularna krivulja $X_0(N)$ biracionalno ekivalentna s krivuljom $C(\Delta_{N,12}, \Delta, \Delta_N) \subseteq \mathbb{P}^2$ koja je stupnja* $\dim M_{12}(\Gamma_0(N)) + g(\Gamma_0(N)) - 2$.

Dokaz. Vrijedi

$$\deg\left(\operatorname{div}_\infty\left(\frac{\Delta}{\Delta_{N,12}}\right)\right) = p^{n-1}q^{m-1}(p+1)(q+1) - 1$$
$$\deg\left(\operatorname{div}_\infty\left(\frac{\Delta_N}{\Delta_{N,12}}\right)\right) = p^{n-1}q^{m-1}((p+1)(q+1) - pq) = p^{n-1}q^{m-1}(p+q+1).$$

Ti brojevi su relativno prosti ako su $(p+q+1)$ i $p^{n-1}q^{m-1}(p+1)(q+1)-1$ relativno prosti. Gledamo slučajeve:

- Za $N = 2^n3^m$ vrijedi $2+3+1 = 6$, prosti djelitelji su 2 i 3 no ti brojevi ne dijele $2^{n-1} \cdot 3^{m-1} \cdot 3 \cdot 4 - 1$
- Za $N = 2^n5^m$ imamo $2+5+1 = 8$, prosti djelitelj je 2 i on ne dijeli $2^{n-1}5^{m-1} \cdot 3 \cdot 6 - 1$
- Za $N = 2^n13^m$ imamo $2+13+1 = 16$, prosti djelitelj je 2 i nije djelitelj broja $2^{n-1} \cdot 13^{m-1} \cdot 3 \cdot 14 - 1$
- Za $N = 3^n5^m$ imamo $3+5+1 = 9$, prosti djelitelj je 3, a on ne dijeli broj $3^{n-1} \cdot 5^{m-1} \cdot 4 \cdot 6 - 1$

Po Lemi 3.11 slijedi da su $X_0(N)$ i $C(\Delta_{N,12}, \Delta, \Delta_N)$ biracionalno ekvivalentni.

$\square$

U preostalim slučajevima $N \in S_2$ događa se sljedeće:

- U slučaju $N = 2^n7^m$ imamo $2+7+1 = 10$, prosti djelitelji tog broja su 2 i 5. Može se dogoditi da 5 dijeli $2^{n-1}7^{m-1}(2+1)(7+1)-1$, naprimjer za $N = 56, 196, 686, 896, \ldots$ U slučaju $N = 56$ imamo

  $$\deg\left(\operatorname{div}_\infty\left(\frac{\Delta}{\Delta_{56,12}}\right)\right) = 95$$
  $$\deg\left(\operatorname{div}_\infty\left(\frac{\Delta_{56}}{\Delta_{56,12}}\right)\right) = 40.$$

  No algoritmom koji računa stupanj krivulje je izračunano da je stupanj preslikavanja s $X_0(56)$ jednak 1.

- Za $N = 3^n 7^m$ imamo $3+7+1 = 11$. U slučaju $N = 3^2 7^2 = 441$, 11 dijeli $3^{2-1}7^{2-1}(3+1)(7+1)-1 = 671$.

- Za $N = 3^n 13^m$ imamo $3+13+1 = 17$. U slučaju $3^4 \cdot 13^3 = 177957$ broj 17 dijeli $3^{4-1}13^{3-1}(3+1)(13+1)-1 = 255527$. Algoritam ne možemo primjeniti jer je matrica čiji rang se računa prevelika. Za $n \leq 3$ i $m \leq 2$ broj 17 ne dijeli $3^{n-1}13^{m-1}(3+1)(13+1)-1$ pa je preslikavanje definirano s $\Delta_{N,12}, \Delta$ i Δ_N biracionalna ekvivalencija.

- Za $N = 5^n 7^m$ imamo $5+7+1 = 13$. Za $n \leq 3$, $m \leq 2$ broj 13 ne dijeli $5^{n-1}7^{m-1}(5+1)(7+1)-1$ pa je preslikavanje definirano s $\Delta_{N,12}, \Delta$ i Δ_N biracionalna ekvivalencija. Za $N = 5^3 \cdot 7^3$ imamo $5^2 7^2(5+1)(7+1)-1 = 58799 = 13 \cdot 4523$.

- Za $N = 5^n 13^m$ vrijedi $5+13+1 = 19$. Za $n \leq 4$ i $m \leq 4$ broj 19 ne dijeli $5^{n-1}13^{m-1}(5+1)(13+1)-1$ pa je preslikavanje definirano s $\Delta_{N,12}, \Delta$ i Δ_N biracionalna ekvivalencija.

- Za $N = 7^n 13^m$ imamo $7+13+1 = 21$, prosti djelitelji su 3 i 7 s time da 7 ne dijeli $7^{n-1}13^{m-1}(7+1)(13+1)-1$. No već za $N = 7 \cdot 13$ je 3 djelitelj od $7^{1-1}13^{1-1}(7+1)(13+1)-1 = 111$.

Teorem 4.14 *Neka je $N = 2^{n_1}3^{n_2}7^{n_3}$ za $n_1, n_2, n_3 \geq 1$ i $\Delta_{N,12}$ η-kvocijent iz Teorema 4.10. Tada je modularna krivulja $X_0(N)$ biracionalno ekivalentna s krivuljom $C(\Delta_{N,12}, \Delta, \Delta_N) \subseteq \mathbb{P}^2$ koja je stupnja* $\dim M_{12}(\Gamma_0(N)) + g(\Gamma_0(N)) - 2$.

Dokaz. Vrijedi

$$\deg\left(\operatorname{div}_\infty\left(\frac{\Delta}{\Delta_{N,12}}\right)\right) = 2^{n_1-1}3^{n_2-1}7^{n_3-1} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 8 - 1$$
$$\deg\left(\operatorname{div}_\infty\left(\frac{\Delta_N}{\Delta_{N,12}}\right)\right) = 2^{n_1-1}3^{n_2-1}7^{n_3-1}(3 \cdot 4 \cdot 8 - 2 \cdot 3 \cdot 7) = 2^{n_1-1}3^{n_2-1}7^{n_3-1} \cdot 54$$

Broj $\deg\left(\operatorname{div}_\infty\left(\frac{\Delta_N}{\Delta_{N,12}}\right)\right)$ ima proste djelitelje u skupu $\{2,3,7\}$, a ti brojevi nisu djelitelji od $\deg\left(\operatorname{div}_\infty\left(\frac{\Delta}{\Delta_{N,12}}\right)\right)$. Zaključujemo da su ti brojevi relativno prosti, pa je po Lemi 3.11 preslikavanje definirano s $\Delta_{N,12}, \Delta$ i Δ_N biracionalna ekvivalencija. $\square$

Za ostale slučajeve brojeva $N \in S_3$ imamo:

- Pogledajmo slučaj $N = 2^n 3^m 5^r$. Za $n = 1, m = 1, r = 3$ to jest $N = 2 \cdot 3 \cdot 25 = 750$

imamo

$$\deg\left(\operatorname{div}_\infty\left(\frac{\Delta}{\Delta_{N,12}}\right)\right) = 5^{3-1}\cdot 3\cdot 4\cdot 6 - 1 = 1799 = 7\cdot 257$$
$$\deg\left(\operatorname{div}_\infty\left(\frac{\Delta_N}{\Delta_{N,12}}\right)\right) = 5^{3-1}(3\cdot 4\cdot 6 - 2\cdot 3\cdot 5) = 1050 = 7\cdot 150$$

i vidimo da ti brojevi nisu relativno prosti. Broj 7 je najmanji zajednički djelitelj i u slučaju $(n, m, r) = (1, 2, 4), (2, 3, 1), (3, 1, 1), ...$

- Pogledajmo slučaj $N = 2^n 3^m 13^r$. Za $n = 1, m = 2, r = 3$ to jest $N = 2\cdot 3^2\cdot 13^3 = 39546$ imamo

$$\deg\left(\operatorname{div}_\infty\left(\frac{\Delta}{\Delta_{N,12}}\right)\right) = 3^{2-1}13^{3-1}\cdot 3\cdot 4\cdot 14 - 1 = 85175$$
$$\deg\left(\operatorname{div}_\infty\left(\frac{\Delta_N}{\Delta_{N,12}}\right)\right) = 3^{2-1}13^{3-1}(3\cdot 4\cdot 14 - 2\cdot 3\cdot 13) = 45630$$

  i vidimo da ti brojevi nisu relativno prosti jer su djeljivi s 5. Broj 5 je najmanji zajednički djelitelj i u slučaju $(n, m, r) = (1, 1, 8), (1, 2, 7), (1, 3, 2), ...$

- Pogledajmo slučaj $N = 2^n 5^m 7^r$. Za $n = 1, m = 1, r = 6$ to jest $N = 2\cdot 5\cdot 7^6 = 1176490$ imamo

$$\deg\left(\operatorname{div}_\infty\left(\frac{\Delta}{\Delta_{N,12}}\right)\right) = 7^{6-1}\cdot 3\cdot 6\cdot 8 - 1 = 2420207$$
$$\deg\left(\operatorname{div}_\infty\left(\frac{\Delta_N}{\Delta_{N,12}}\right)\right) = 7^{6-1}(3\cdot 6\cdot 8 - 2\cdot 5\cdot 7) = 1243718$$

  i vidimo da ti brojevi nisu relativno prosti jer su djeljivi s 37. Broj 37 je najmanji zajednički djelitelj i u slučaju $(n, m, r) = (1, 5, 2), (9, 5, 4), ...$

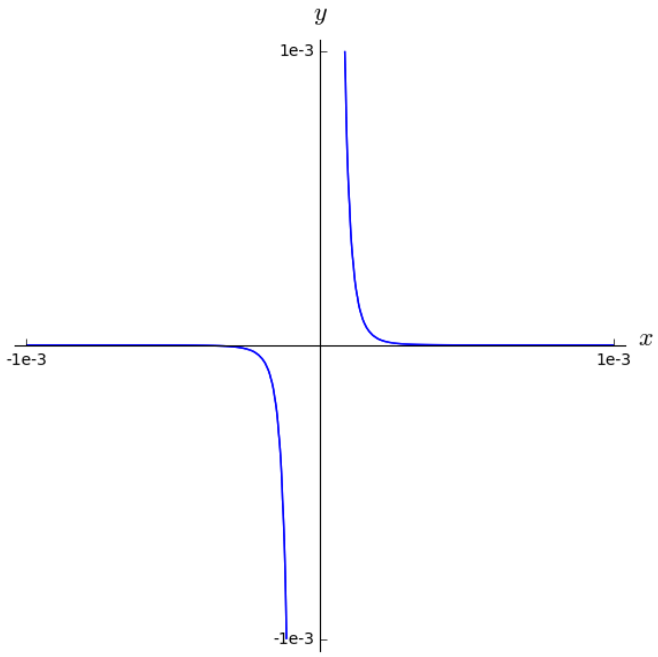
Pretpostavka je da je za sve N koji leže u skupovima S_1, S_2 i S_3 iz Teorema 4.10 krivulja $X_0(N)$ biracionalno ekvivalentna s $C(\Delta_{N,12}, \Delta, \Delta_N)$, što je provjereno algoritmom u slučajevima $N = 14, 21, 28, 30, 35, 39, 42, 56,$ no za sada nemamo općenit dokaz za tu tvrdnju.

U slučajevimo kada imamo biracionalnu ekvivalenciju, stupanj dobivene krivulje je prilično velik, a polinomi imaju velike koeficijente. Već za $N = 10$ polinom je stupnja 17 (krivulja $\Gamma_0(10)$ je genusa 0) i ima 37-znamenkaste koeficijente. Pogledajmo jedan primjer.

Primjer 4.15 *Pogledajmo krivulju* $C(\Delta_{6,12}, \Delta, \Delta(6\cdot))$. *Njen definirajući polinom je*

$$P(x_0, x_1, x_2) = -x_0^5x_1^6 - 98304x_0^5x_1^5x_2 + 281474976710656x_0^6x_1^3x_2^2 - 6442450944x_0^5x_1^4x_2^2$$
$$-271029616246784x_0^5x_1^3x_2^3 + 1478985x_0^4x_1^4x_2^3 - 7387029288794456064x_0^5x_1^2x_2^4$$
$$-276858830848x_0^4x_1^3x_2^4 - 1090491731185059590307 84x_0^5x_1x_2^5 + 6038438402850816x_0^4x_1^2x_2^5$$
$$-295004x_0^3x_1^3x_2^5 - 7888395046188220416x_0^4x_1x_2^6 - 67113123840x_0^3x_1^2x_2^6$$
$$-160269657440256x_0^3x_1x_2^7 + 13278x_0^2x_1^2x_2^7 - 804028416x_0^2x_1x_2^8 - 204x_0x_1x_2^9 + x_2^{11}$$

Stupanj krivulje je jednak 11, *genus krivulje je jednak* 0 *jer je ona biracionalno ekvivalentna s krivuljom* $X_0(6)$, *a genus je invarijanta biracionalne ekvivalencije. Ta krivulja ima singularnu točku* $(1 : 0 : 0)$. *Na Slici 4.3 vidimo afinu krivulju određenu s* $P(x_0/x_2, x_1/x_2)$.



Slika 4.3: Krivulja $C(\Delta_{6,12}, \Delta, \Delta(6\cdot))$

4.4 Slučaj $\Gamma_0(N)$ nema eliptičkih točaka

Popratni materijal uz članak [42] je web stranica `users.wfu.edu/rouseja/eta` na kojoj su autori objavili algoritme korištene pri traženju η-kvocijenata i baze od $M_2(\Gamma_0(N))$

koje se sastoje od η-kvocijenata u slučaju kada oni generiraju taj prostor. Teorem 2.20 kaže da to vrijedi kada je N složen broj i u $\Gamma_0(N)$ nema eliptičkih točaka. Koristeći njihove podatke, konstruirana su preslikavanja s $\Gamma_0(N)$ u $\mathbb{P}^2$.

Teorem 4.16 *Za* 30 *vrijednosti broja N i funkcije navedene u Tablici 4.5, preslikavanje $X_0(N) \to \mathbb{P}^2$ definirano s*

$$\boldsymbol{a}_z \mapsto (f(z) : g(z) : h(z))$$

je biracionalna ekvivalencija. U Tablici 4.6 navedeni su definirajući polinomi dobivenih krivulja.

Primjer 4.17 *Pogledajmo krivulju za $N = 20$. Dobivena je kao slika preslikavanja*

$$\boldsymbol{a}_z \mapsto \left(\frac{\eta(4z)^8}{\eta(2z)^4}, \frac{\eta(20z)^8}{\eta(10z)^4}, \frac{\eta(5z)^8}{\eta(10z)^4}\right),$$

kojoj je definirajući polinom

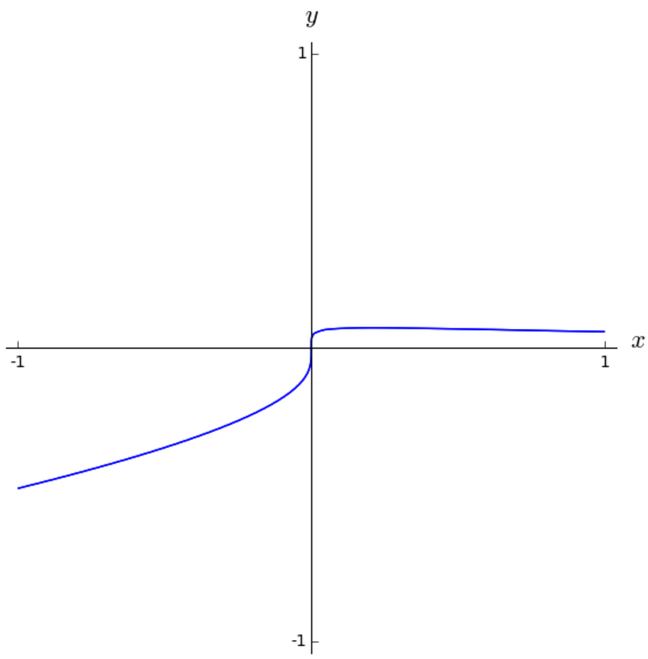
$$\begin{aligned} P(x_0, x_1, x_2) =& x_0^3x_1^2 - 75x_0^2x_1^3 + 1875x_0x_1^4 - 15625x_1^5 - 80x_0^2x_1^2x_2 - 2000x_0x_1^3x_2 - 2x_0^2x_1x_2^2 \\ &+ 250x_0x_1^2x_2^2 - 20x_0x_1x_2^3 + x_0.x_2^4 \end{aligned}$$

Krivulja je stupnja 5 *i genusa* 1 *pa ona ima singularne točke. Točka* $(1 : 0 : 0)$ *je singularna točka. Afina krivulja određena s $P(x_0/x_2, x_1/x_2)$ je prikazana na Slici 4.4.*

Pretpostavka je da za svaki $\Gamma_0(N)$ takav da je $M_2(\Gamma_0(N))$ generiran η-kvocijentima možemo naći tri linearno nezavisna η-kvocijenta koji daju biracionalnu ekvivalenciju, no za to trenutno nemamo dokaza. U posebnom slučaju, kada je genus od $\Gamma_0(N)$ jednak 0, u ([42], Teorem 11) dokazano je da tada postoji bijekcija između $\eta-$kvocijenata težine k i kuspidalnih divizora stupnja $\frac{[\Gamma(1):\Gamma_0(N)]k}{12}$.

Teorem 4.18 *Neka je $\Gamma_0(N)$ genusa* 0 *takva da je* $\dim M_2(\Gamma_0(N)) \geq 3$ *i postoji η-kvocijent u $M_2(\Gamma_0(N))$. Tada postoje tri linearno nezavisna $\eta-$kvocijenta f, g, h težine* 2 *koji daju biracionalnu ekvivalenciju modularne krivulje $X_0(N)$ i krivulje $C(f, g, h) \subseteq \mathbb{P}^2$.*

Dokaz. Budući da postoji bijekcija između $\eta-$kvocijenata težine 2 i divizora stupnja $\frac{[\Gamma(1):\Gamma_0(N)]}{6}$, tada postoji kvocijent koji ima nulu najvećeg reda u kuspu ∞, označimo ga s f, kvocijent koji ima nulu najvećeg reda u kuspu $\mathfrak{o}$, označimo ga s g te kvocijent koji ima



Slika 4.4: Krivulja $C(\Delta_{20,12}, \Delta, \Delta(20\cdot))$

nulu reda $\frac{[\Gamma(1):\Gamma_0(N)]}{6} - 1$ u kuspu ∞ i nulu reda 1 u kuspu $\mathfrak{o}$, neka je označen s h, odnosno imamo

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(f) &= \frac{[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)]}{6}\mathbf{a}_\infty \\
\operatorname{div}(g) &= \frac{[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)]}{6}\mathbf{a}_\mathfrak{o} \\
\operatorname{div}(h) &= \left(\frac{[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)]}{6} - 1\right)\mathbf{a}_\infty + \mathbf{a}_\mathfrak{o}.
\end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned}
\deg(\operatorname{div}_\infty(g/f)) &= \frac{[\Gamma(1) : \Gamma_0(N)]}{6} \\
\deg(\operatorname{div}_\infty(h/f)) &= 1.
\end{aligned}$$

Ti brojevi su relativno prosti pa po Lemi 3.11 slijedi da je preslikavanje $X_0(N) \to C(f, g, h)$ biracionalna ekvivalencija.

$\square$

Uvjeti ovog teorema zadovoljeni su za $N = 6, 8, 9, 12, 16, 18$. Za $N = 4, 11$ η-kvocijenti postoje, ali je $\dim M_2(\Gamma_0(4)) = \dim M_2(\Gamma_0(11)) = 2$, dok za $N = 2, 3, 5, 7, 10, 13, 25$ ne postoji niti jedan η-kvocijent u $M_2(\Gamma_0(N))$. Sljedeća tablica daje η-kvocijente iz dokaza Teorema 4.18. Kvocijent $\prod\limits_{\delta|N} \eta(\delta z)^{r_\delta}$ označen je s $\prod \delta^{r_\delta}$.

Tablica 4.4: η-kvocijenti iz Teorema 4.18 i definirajući polinomi dobivenih modela

N	f, g, h	polinom od $C(f,g,h)$
6	$f = 1^2 2^{-4} 3^{-6} 6^{12}$, $\operatorname{div}(f) = 2\mathbf{a}_\infty$ $g = 1^{12} 2^{-6} 3^{-4} 6^2$, $\operatorname{div}(g) = 2\mathbf{a}_0$ $h = 1^7 2^{-5} 3^{-5} 6^7$, $\operatorname{div}(h) = \mathbf{a}_\infty + \mathbf{a}_0$	$x_0x_1 - x_2^2$
8	$f = 4^{-4} 18^8$, $\operatorname{div}(f) = 2\mathbf{a}_\infty$ $g = 1^8 2^{-4}$, $\operatorname{div}(g) = 2\mathbf{a}_0$ $h = 1^4 2^{-2} 4^{-2} 8^4$, $\operatorname{div}(h) = \mathbf{a}_\infty + \mathbf{a}_0$	$x_0x_1 - x_2^2$
9	$f = 3^{-2} 9^6$, $\operatorname{div}(f) = 2\mathbf{a}_\infty$ $g = 1^6 3^{-2}$, $\operatorname{div}(g) = 2\mathbf{a}_0$ $h = 1^3 3^{-2} 9^3$, $\operatorname{div}(h) = \mathbf{a}_\infty + \mathbf{a}_0$	$x_0x_1 - x_2^2$
12	$f = 2^2 4^{-4} 6^{-6} 12^{12}$, $\operatorname{div}(f) = 4\mathbf{a}_\infty$ $g = 1^{12} 2^{-6} 3^{-4} 6^2$, $\operatorname{div}(g) = 4\mathbf{a}_0$ $h = 1^3 3^{-1} 4^{-3} 6^{-4} 12^9$, $\operatorname{div}(h) = 3\mathbf{a}_\infty + \mathbf{a}_0$	$x_0^3x_1 - x_2^4$
16	$f = 8^{-4} 16^8$, $\operatorname{div}(f) = 4\mathbf{a}_\infty$, $g = 1^8 2^{-4}$, $\operatorname{div}(g) = 4\mathbf{a}_0$ $h = 1^2 2^{-1} 8^{-3} 16^6$, $\operatorname{div}(h) = 3\mathbf{a}_\infty + \mathbf{a}_0$	$x_0^3x_1 - x_2^4$
18	$f = 3^2 6^{-4} 9^{-6} 18^{12}$, $\operatorname{div}(f) = 6\mathbf{a}_\infty$ $g = 1^{12} 2^{-6} 3^{-4} 6^2$, $\operatorname{div}(g) = 6\mathbf{a}_0$ $h = 1^2 2^{-1} 3^1 6^{-3} 9^{-5} 18^{10}$, $\operatorname{div}(h) = 5\mathbf{a}_\infty + \mathbf{a}_0$	$x_0^5x_1 - x_2^6$

U sljedećim tablicama dajemo dokaz Teorema 4.16. Navedeni su η-kvocijenti koji definiraju preslikavanja stupnja 1 to jest koji daju model za $\Gamma_0(N)$ i stupnjevi dobivenih modela (Tablica 4.5) te definirajući polinomi za te modele (Tablica 4.6). Dobiveni stupnjevi nisu optimalni - moguće je da izbor neka druga tri linearno nezavisna η-kvocijenta daje biracionalnu ekvivalenciju s krivuljom manjeg stupnja. Također, neki drugi izbor funkcija daje i novi model, pa možemo konstruirati više modela iste krivulje.

U Tablici 4.6 dajemo polinome koji definiraju krivulje dobivene kao slike prelikavanja modularnim formama navedenim u Tablici 4.5.

η-kvocijent $\prod_{\delta|N} \eta(\delta z)^{r_\delta}$ zapisujemo u obliku $\prod_{\delta|N} \delta^{r_\delta}$.

Tablica 4.5: η-kvocijenti iz Teorema 4.16

N	f, g, h	$\deg(C(f,g,h))$
6	$f = 1^{12}2^{-6}3^{-4}6^{2}$ $g = 1^{7}2^{-5}3^{-5}6^{7}$ $h = 1^{2}2^{-4}3^{-6}6^{12}$	2
12	$f = 2^{-4}4^{8}$ $g = 6^{-4}12^{8}$ $h = 1^{8}2^{-4}$	4
14	$f = 1^{-3}2^{5}7^{5}14^{-3}$ $g = 1^{5}2^{-3}7^{-3}14^{5}$ $h = 1^{4}2^{-2}7^{4}14^{-2}$	4
15	$f = 1^{4}3^{-2}5^{-2}15^{4}$ $g = 1^{-2}3^{4}5^{4}15^{-2}$ $h = 1^{3}3^{-1}5^{3}15^{-1}$	4
16	$f = 2^{-4}4^{8}$ $g = 4^{8}8^{-4}$ $h = 8^{-4}16^{8}$	4
18	$f = 1^{6}3^{-2}$ $g = 2^{6}6^{-2}$ $h = 1^{7}2^{-5}3^{-5}6^{7}$	4
20	$f = 2^{-4}4^{8}$ $g = 10^{-4}20^{8}$ $h = 5^{8}10^{-4}$	5
24	$f = 2^{-4}4^{8}$ $g = 6^{-4}12^{8}$ $h = 1^{1}2^{-6}3^{-2}4^{8}6^{8}8^{-2}12^{-6}24^{2}$	5
27	$f = 1^{6}3^{-2}$ $g = 3^{-2}9^{6}$ $h = 9^{-2}27^{6}$	6
28	$f = 14^{-4}28^{8}$ $g = 2^{5}4^{-3}14^{-3}28^{5}$ $h = 2^{-4}4^{8}$	7

N	f, g, h	$\deg(C(f,g,h))$
30	$f = 2^4 6^{-2} 10^{-2} 30^4$ $g = 1^3 3^{-1} 5^3 15^{-1}$ $h = 1^4 3^{-2} 5^{-2} 15^4$	8
32	$f = 16^{-4} 32^8$ $g = 4^{-4} 9^8$ $h = 1^4 4^{-1} 16^{-1} 32^2$	6
36	$f = 2^6 6^{-2}$ $g = 2^{-4} 4^8$ $h = 6^{-4} 12^8$	9
40	$f = 2^5 4^{-2} 8^{-1} 10^{-1} 20^{-2} 40^5$ $g = 1^5 2^{-2} 4^{-1} 5^{-1} 10^{-2} 20^5$ $h = 5^8 10^{-4}$	10
42	$f = 3^{-3} 6^5 21^5 42^{-3}$ $g = 1^{-6} 2^{12} 3^2 6^{-4}$ $h = 1^{-3} 2^6 3^1 6^{-2} 7^{-3} 14^6 21^1 42^{-2}$	14
44	$f = 22^{-4} 44^8$ $g = 1^3 4^{-1} 11^{-1} 44^3$ $h = 4^2 44^2$	8
45	$f = 15^{-2} 45^6$ $g = 3^{-2} 9^4 15^4 45^{-2}$ $h = 3^{-2} 9^6$	10
48	$f = 24^{-4} 48^8$ $g = 3^6 3^{-3} 24^{-1} 48^2$ $h = 8^{-4} 16^8$	12
52	$f = 25^{-4} 52^8$ $g = 2^{-2} 4^4 26^{-2} 52^4$ $h = 1^1 2^{-2} 4^3 13^3 26^{-2} 52^1$	11
54	$f = 2^6 6^{-2}$ $g = 1^6 3^{-2}$ $h = 2^3 6^{-1} 18^{-1} 54^3$	9

N	f, g, h	$\deg(C(f,g,h))$
56	$f = 2^{-3}4^5 14^5 28^{-3}$ $g = 1^{-3}2^5 7^5 14^{-3}$ $h = 1^1 2^{-3}4^5 7^1 8^{-1}14^1 28^1 56^{-1}$	8
60	$f = 30^{-4}60^8$ $g = 2^4 6^{-2}10^{-2}30^4$ $h = 4^4 12^{-2}20^{-2}60^4$	19
63	$f = 1^2 3^{-1}7^1 9^1 21^{-1}63^2$ $g = 1^1 3^{-1}7^2 9^2 21^{-1}63^1$ $h = 3^{-2}6^6$	11
64	$f = 2^2 4^{-3}8^4 16^{-1}32^2$ $g = 1^2 2^{-1}32^{-3}64^6$ $h = 8^8 16^{-4}$	11
66	$f = 1^2 11^2$ $g = 1^1 3^1 11^1 33^1$ $h = 1^{-1}3^2 6^1 11^1 22^2 66^{-1}$	13
70	$f = 2^2 70^2$ $g = 5^5 10^{-3}35^{-3}70^5$ $h = 2^3 10^{-1}14^{-1}70^3$	16
75	$f = 1^1 5^1 15^1 75^1$ $g = 5^1 15^1 25^1 75^1$ $h = 1^{-1}3^1 5^4 15^{-2}25^{-1}75^3$	9
81	$f = 3^2 9^{-1}81^3$ $g = 3^5 9^{-2}27^1$ $h = 3^1 9^{-2}27^5$	12
88	$f = 8^2 88^2$ $g = 22^{-4}44^8$ $h = 2^3 8^{-1}22^{-1}88^3$	13
98	$f = 7^1 14^1 49^1 98^1$ $g = 1^1 7^1 14^1 98^1$ $h = 1^2 2^{-1}7^1 14^1 49^{-1}98^2$	8

Tablica 4.6: Definirajući polinomi za krivulje dobivene od funkcija iz Tablice 4.5

N	polinom od $C(f,g,h)$
6	$-x_1^2+x_0x_2$
8	$-x_1^2+16x_0x_2+x_2^2$
9	$x_0^2-2x_0x_1+x_1^2-54x_0x_2-27x_1x_2+729x_2^2$
12	$x_0^4-28x_0^3x_1+270x_0^2x_1^2-972x_0x_1^3+729x_1^4-16x_0^2x_1x_2-x_0x_1x_2^2$
14	$64x_0^2x_1^2-16x_0^2x_1x_2-16x_0x_1^2x_2+x_0^2x_2^2-31x_0x_1x_2^2+x_1^2x_2^2-2x_0x_2^3-2x_1x_2^3+x_2^4$
15	$81x_0^2x_1^2+18x_0^2x_1x_2-18x_0x_1^2x_2+x_0^2x_2^2-9x_0x_1x_2^2+x_1^2x_2^2+2x_0x_2^3-2x_1x_2^3+x_2^4$
16	$x_0^4-16x_0^2x_1x_2-x_1^3x_2-256x_0^2x_2^2-16x_1^2x_2^2$
18	$x_0^4-x_0x_1^3+18x_0^2x_1x_2+81x_1^2x_2^2$
20	$x_0^3x_1^2-75x_0^2x_1^3+1875x_0x_1^4-15625x_1^5-80x_0^2x_1^2x_2-2000x_0x_1^3x_2-2x_0^2x_1x_2^2$ $+250x_0x_1^2x_2^2-20x_0x_1x_2^3+x_0x_2^4$
24	$x_0^5-12x_0^4x_1+30x_0^3x_1^2-28x_0^2x_1^3+9x_0x_1^4-2x_0^4x_2+22x_0^3x_1x_2-38x_0^2x_1^2x_2+18x_0x_1^3x_2$ $+x_0^3x_2^2-19x_0^2x_1x_2^2+27x_0x_1^2x_2^2-9x_1^3x_2^2+6x_0x_1x_2^3-6x_1^2x_2^3-x_1x_2^4$
27	$x_0^6-54x_0^5x_1+1215x_0^4x_1^2-14580x_0^3x_1^3+98415x_0^2x_1^4-354294x_0x_1^5+531441x_1^6$ $-108x_0^4x_1x_2-5130x_0^3x_1^2x_2+1458x_0^2x_1^3x_2+65610x_0x_1^4x_2-39366x_1^5x_2-2x_0^3x_1x_2^2$ $+810x_0^2x_1^2x_2^2+486x_0x_1^3x_2^2+2187x_1^4x_2^2-36x_0x_1^2x_2^3-54x_1^3x_2^3+x_1^2x_2^4$
28	$5764801x_0^7-470596x_0^6x_2-45619x_0^4x_1^2x_2-490x_0^2x_1^4x_2-x_1^6x_2+14406x_0^5x_2^2-2058x_0^3x_1^2x_2^2$ $+3x_0x_1^4x_2^2-196x_0^4x_2^3-3x_0^2x_1^2x_2^3+x_0^3x_2^4$
30	$256x_0^6x_1^2-4608x_0^6x_1x_2-1408x_0^5x_1^2x_2-32x_0^4x_1^3x_2+20736x_0^6x_2^2+19584x_0^5x_1x_2^2$ $+1680x_0^4x_1^2x_2^2-168x_0^3x_1^3x_2^2+x_0^2x_1^4x_2^2-62208x_0^5x_2^3-16704x_0^4x_1x_2^3+1480x_0^3x_1^2x_2^3$ $-30x_0^2x_1^3x_2^3+69984x_0^4x_2^4+2664x_0^3x_1x_2^4+651x_0^2x_1^2x_2^4-2x_0x_1^3x_2^4-37584x_0^3x_2^5$ $+2106x_0^2x_1x_2^5+23x_0x_1^2x_2^5+10449x_0^2x_2^6-108x_0x_1x_2^6+x_1^2x_2^6-1458x_0x_2^7-18x_1x_2^7+81x_2^8$
32	$16777216x_0^6-6291456x_0^5x_1+983040x_0^4x_1^2-81920x_0^3x_1^3+3840x_0^2x_1^4-96x_0x_1^5+x_1^6$ $+6291456x_0^5x_2+655360x_0^4x_1x_2+1064960x_0^3x_1^2x_2-17408x_0^2x_1^3x_2-3232x_0x_1^4x_2$ $-6x_1^5x_2+917504x_0^4x_2^2+77824x_0^3x_1x_2^2+96000x_0^2x_1^2x_2^2-2672x_0x_1^3x_2^2+15x_1^4x_2^2$ $+69632x_0^3x_2^3-2560x_0^2x_1x_2^3+2192x_0x_1^2x_2^3-20x_1^3x_2^3+3136x_0^2x_2^4-368x_0x_1x_2^4+15x_1^2x_2^4$ $+80x_0x_2^5-6x_1x_2^5+x_2^6$

N	polinom od $C(f,g,h)$
36	$-x_1^9 + 72x_1^8x_2 - 2268x_1^7x_2^2 + x_0^6x_2^3 + 40824x_1^6x_2^3 - 459270x_1^5x_2^4 + 3306744x_1^4x_2^5$ $-14880348x_1^3x_2^6 + 38263752x_1^2x_2^7 - 43046721x_1x_2^8$
40	$512x_0^5x_1^3 - 896x_0^4x_1^4 + 480x_0^3x_1^5 - 104x_0^2x_1^6 + 8x_0x_1^7 - 704x_0^4x_1^3x_2 + 1280x_0^3x_1^4x_2$ $-392x_0^2x_1^5x_2 + 32x_0x_1^6x_2 - 512x_0^4x_1^2x_2^2 + 1336x_0^3x_1^3x_2^2 - 632x_0^2x_1^4x_2^2 + 80x_0x_1^5x_2^2$ $+128x_0^4x_1x_2^3 + 476x_0^3x_1^2x_2^3 - 512x_0^2x_1^3x_2^3 + 83x_0x_1^4x_2^3 + x_1^5x_2^3 + 208x_0^3x_1x_2^4 - 108x_0^2x_1^2x_2^4$ $+19x_0x_1^3x_2^4 + 34x_0^2x_1x_2^5 - x_0^2x_2^6$
44	$-234256x_0^5x_1^3 - 14641x_0^4x_1^4 + 228932x_0^4x_1^3x_2 + 35816x_0^3x_1^4x_2 + 2101x_0^2x_1^5x_2 + 49x_0x_1^6x_2$ $+x_1^7x_2 + 937024x_0^5x_1x_2^2 + 740036x_0^4x_1^2x_2^2 + 123420x_0^3x_1^3x_2^2 + 7898x_0^2x_1^4x_2^2 + 108x_0x_1^5x_2^2$ $+532400x_0^4x_1x_2^3 + 156332x_0^3x_1^2x_2^3 + 14685x_0^2x_1^3x_2^3 + 191x_0x_1^4x_2^3 + 89056x_0^3x_1x_2^4$ $+14696x_0^2x_1^2x_2^4 + 154x_0x_1^3x_2^4 + 4312x_0^2x_1x_2^5 - 126x_0x_1^2x_2^5 + 21x_0x_1x_2^6 - x_0x_2^7$
45	$x_0^2x_1^8 - 4x_0^3x_1^6x_2 + 6x_0^4x_1^4x_2^2 - 4x_0^5x_1^2x_2^3 + 6x_0^2x_1^5x_2^3 + x_0^6x_2^4 - 60x_0^3x_1^3x_2^4 - 26x_0^4x_1x_2^5$ $-2x_0x_1^4x_2^5 + 45x_0^2x_1^2x_2^6 - 2x_0^3x_2^7 - 10x_0x_1x_2^8 + x_2^{10}$
48	$729x_0^{12} - 6804x_0^{11}x_2 - 404352x_0^{10}x_1x_2 - 27216x_0^9x_1^2x_2 + 28458x_0^{10}x_2^2 - 16948224x_0^9x_1x_2^2$ $+26766720x_0^8x_1^2x_2^2 - 3912192x_0^7x_1^3x_2^2 + 115344x_0^6x_1^4x_2^2 - 432x_0^5x_1^5x_2^2 - 70228x_0^9x_2^3$ $-80271872x_0^8x_1x_2^3 - 144009664x_0^7x_1^2x_2^3 + 2603008x_0^6x_1^3x_2^3 - 887232x_0^5x_1^4x_2^3$ $+3392x_0^4x_1^5x_2^3 + 128x_0^3x_1^6x_2^3 - 64x_0^2x_1^7x_2^3 - x_0x_1^8x_2^3 + 113247x_0^8x_2^4 - 55415808x_0^7x_1x_2^4$ $+89294976x_0^6x_1^2x_2^4 - 13040640x_0^5x_1^3x_2^4 + 384480x_0^4x_1^4x_2^4 - 1440x_0^3x_1^5x_2^4$ $-124776x_0^7x_2^5 + 18014976x_0^6x_1x_2^5 - 35997408x_0^5x_1^2x_2^5 + 5216256x_0^4x_1^3x_2^5$ $-153792x_0^3x_1^4x_2^5 + 576x_0^2x_1^5x_2^5 + 95340x_0^6x_2^6 + 1711104x_0^5x_1x_2^6 + 3216000x_0^4x_1^2x_2^6$ $-434688x_0^3x_1^3x_2^6 + 12816x_0^2x_1^4x_2^6 - 48x_0x_1^5x_2^6 - 50184x_0^5x_2^7 - 1018368x_0^4x_1x_2^7$ $-68544x_0^3x_1^2x_2^7 + 17703x_0^4x_2^8 + 119808x_0^3x_1x_2^8 + 8064x_0^2x_1^2x_2^8 - 3972x_0^3x_2^9 - 4992x_0^2x_1x_2^9$ $-336x_0x_1^2x_2^9 + 522x_0^2x_2^{10} - 36x_0x_2^{11} + x_2^{12}$
52	$169x_0^7x_1^4 - 871x_0^6x_1^5 + 1821x_0^5x_1^6 - 1955x_0^4x_1^7 + 1115x_0^3x_1^8 - 309x_0^2x_1^9 + 31x_0x_1^{10} - x_1^{11}$ $-4706x_0^6x_1^4x_2 - 6802x_0^5x_1^5x_2 + 3260x_0^4x_1^6x_2 - 1076x_0^3x_1^7x_2 + 102x_0^2x_1^8x_2 + 6x_0x_1^9x_2$ $-1105x_0^6x_1^3x_2^2 + 2940x_0^5x_1^4x_2^2 - 1150x_0^4x_1^5x_2^2 + 332x_0^3x_1^6x_2^2 + 7x_0^2x_1^7x_2^2 - 26x_0^6x_1^2x_2^3$ $-370x_0^5x_1^3x_2^3 + 370x_0^4x_1^4x_2^3 - 38x_0^3x_1^5x_2^3 + 96x_0^5x_1^2x_2^4 - 32x_0^4x_1^3x_2^4 + 4x_0^5x_1x_2^5 + x_0^5x_2^6$

N	polinom od $C(f,g,h)$
54	$64x_0^9 - 432x_0^8x_1 + 1260x_0^7x_1^2 - 2073x_0^6x_1^3 + 2106x_0^5x_1^4 - 1359x_0^4x_1^5 + 552x_0^3x_1^6 - 135x_0^2x_1^7$ $+18x_0x_1^8 - x_1^9 - 163296x_0^7x_1x_2 - 1304424x_0^6x_1^2x_2 - 104976x_0^5x_1^3x_2 + 349920x_0^4x_1^4x_2$ $-17010x_0^3x_1^5x_2 - 21870x_0^2x_1^6x_2 + 1458x_0x_1^7x_2 + 486x_1^8x_2 - 314928x_0^6x_1x_2^2$ $+29760696x_0^5x_1^2x_2^2 - 68733036x_0^4x_1^3x_2^2 - 55860354x_0^3x_1^4x_2^2 - 11691702x_0^2x_1^5x_2^2$ $-1299078x_0x_1^6x_2^2 - 98415x_1^7x_2^2 - 267846264x_0^4x_1^2x_2^3 + 2012035626x_0^3x_1^3x_2^3$ $+1061819118x_0^2x_1^4x_2^3 + 162620946x_0x_1^5x_2^3 + 10628820x_1^6x_2^3 + 516560652x_0^3x_1^2x_2^4$ $-23245229340x_0^2x_1^3x_2^4 - 7748409780x_0x_1^4x_2^4 - 645700815x_1^5x_2^4 + 125524238436x_0x_1^3x_2^5$ $+20920706406x_1^4x_2^5 - 282429536481x_1^3x_2^6$
56	$64x_0^8 - 160x_0^7x_1 + 132x_0^6x_1^2 - 40x_0^5x_1^3 + 4x_0^4x_1^4 - 384x_0^7x_2 + 496x_0^6x_1x_2 - 348x_0^5x_1^2x_2$ $+78x_0^4x_1^3x_2 - 4x_0^3x_1^4x_2 + 992x_0^6x_2^2 - 684x_0^5x_1x_2^2 + 406x_0^4x_1^2x_2^2 - 58x_0^3x_1^3x_2^2 + x_0^2x_1^4x_2^2$ $-1440x_0^5x_2^3 + 544x_0^4x_1x_2^3 - 296x_0^3x_1^2x_2^3 + 22x_0^2x_1^3x_2^3 + 1284x_0^4x_2^4 - 234x_0^3x_1x_2^4 + 145x_0^2x_1^2x_2^4$ $-4x_0x_1^3x_2^4 - 720x_0^3x_2^5 + 16x_0^2x_1x_2^5 - 40x_0x_1^2x_2^5 + 248x_0^2x_2^6 + 28x_0x_1x_2^6 + 4x_1^2x_2^6 - 48x_0x_2^7$ $-8x_1x_2^7 + 4x_2^8$
60	$-x_0^4x_1^{15} + 66x_0^4x_1^{14}x_2 - 9900x_0^6x_1^{11}x_2^2 - 1569x_0^4x_1^{13}x_2^2 + 50625x_0^8x_1^8x_2^3 - 511650x_0^6x_1^{10}x_2^3$ $+17257x_0^4x_1^{12}x_2^3 - 4183650x_0^6x_1^9x_2^4 - 105826x_0^4x_1^{11}x_2^4 - 7595100x_0^6x_1^8x_2^5 + 449661x_0^4x_1^{10}x_2^5$ $-2835000x_0^6x_1^7x_2^6 - 1146132x_0^4x_1^9x_2^6 - 28x_0^2x_1^{11}x_2^6 - 101700x_0^6x_1^6x_2^7 + 1810594x_0^4x_1^8x_2^7$ $-50x_0^2x_1^{10}x_2^7 - 1822132x_0^4x_1^7x_2^8 + 1502x_0^2x_1^9x_2^8 + 1183956x_0^4x_1^6x_2^9 - 6992x_0^2x_1^8x_2^9$ $-379800x_0^4x_1^5x_2^{10} + 16376x_0^2x_1^7x_2^{10} + 51526x_0^4x_1^4x_2^{11} - 23046x_0^2x_1^6x_2^{11} + x_1^8x_2^{11}$ $+20558x_0^2x_1^5x_2^{12} - 8x_1^7x_2^{12} - 11412x_0^2x_1^4x_2^{13} + 28x_1^6x_2^{13} + 3544x_0^2x_1^3x_2^{14} - 56x_1^5x_2^{14}$ $-452x_0^2x_1^2x_2^{15} + 70x_1^4x_2^{15} - 56x_1^3x_2^{16} + 28x_1^2x_2^{17} - 8x_1x_2^{18} + x_2^{19}$

N	polinom od $C(f,g,h)$
63	$x_0^9x_1^2 - 26x_0^8x_1^2x_2 + 211x_0^7x_1^2x_2^2 - 351x_0^6x_1^3x_2^2 - 560x_0^6x_1^2x_2^3 + 756x_0^5x_1^3x_2^3 - 729x_0^4x_1^4x_2^3$ $+295x_0^5x_1^2x_2^4 - 216x_0^4x_1^3x_2^4 + 100x_0^4x_1^2x_2^5 - 189x_0^3x_1^3x_2^5 - 91x_0^4x_1x_2^6 + 379x_0^3x_1^2x_2^6$ $+196x_0^3x_1x_2^7 - 98x_0^2x_1^2x_2^7 - 56x_0^2x_1x_2^8 + 49x_0x_1^2x_2^8 - 49x_0x_1x_2^9 - 49x_2^{11}$
64	$1099511627776x_1^{11} - 2097152x_0^4x_1^6x_2 - 4831838208x_0^3x_1^7x_2 - 382788960256x_0^2x_1^8x_2$ $-1992864825344x_0x_1^9x_2 - 858993459200x_1^{10}x_2 + x_0^8x_1x_2^2 - 1664x_0^7x_1^2x_2^2 + 878080x_0^6x_1^3x_2^2$ $-156319744x_0^5x_1^4x_2^2 + 5955747840x_0^4x_1^5x_2^2 + 28879880192x_0^3x_1^6x_2^2 + 213330690048x_0^2x_1^7x_2^2$ $+121064390656x_0x_1^8x_2^2 + 257966473216x_1^9x_2^2 - 52x_0^7x_1x_2^3 - 516704x_0^6x_1^2x_2^3$ $-143784448x_0^5x_1^3x_2^3 - 1158279168x_0^4x_1^4x_2^3 - 12610633728x_0^3x_1^5x_2^3 - 26852458496x_0^2x_1^6x_2^3$ $-83307266048x_0x_1^7x_2^3 - 43956305920x_1^8x_2^3 + 1004x_0^6x_1x_2^4 - 5974624x_0^5x_1^2x_2^4$ $+136266112x_0^4x_1^3x_2^4 + 680919040x_0^3x_1^4x_2^4 + 4874272768x_0^2x_1^5x_2^4 + 5311561728x_0x_1^6x_2^4$ $+6180306944x_1^7x_2^4 - 8856x_0^5x_1x_2^5 + 2280144x_0^4x_1^2x_2^5 - 90770176x_0^3x_1^3x_2^5$ $-304056320x_0^2x_1^4x_2^5 - 990019584x_0x_1^5x_2^5 - 680525824x_1^6x_2^5 + 35476x_0^4x_1x_2^6$ $+987424x_0^3x_1^2x_2^6 + 24673792x_0^2x_1^3x_2^6 + 41281536x_0x_1^4x_2^6 + 45912064x_1^5x_2^6 - 56696x_0^3x_1x_2^7$ $-662080x_0^2x_1^2x_2^7 - 3841280x_0x_1^3x_2^7 - 3574784x_1^4x_2^7 + 29520x_0^2x_1x_2^8 + 87424x_0x_1^2x_2^8$ $+136000x_1^3x_2^8 - 4400x_0x_1x_2^9 - 6256x_1^2x_2^9 + 140x_1x_2^{10} - x_2^{11}$
66	$x_0^5x_1^8 + x_0^8x_1^4x_2 + 3x_0^7x_1^5x_2 + 4x_0^6x_1^6x_2 - 22x_0^5x_1^7x_2 - 66x_0^4x_1^8x_2 - 144x_0^3x_1^9x_2 - 135x_0^2x_1^{10}x_2$ $-81x_0x_1^{11}x_2 - 4x_0^9x_1^2x_2^2 - 36x_0^8x_1^3x_2^2 - 176x_0^7x_1^4x_2^2 - 529x_0^6x_1^5x_2^2 - 1095x_0^5x_1^6x_2^2$ $-1590x_0^4x_1^7x_2^2 - 1575x_0^3x_1^8x_2^2 - 999x_0^2x_1^9x_2^2 - 324x_0x_1^{10}x_2^2 + 4x_0^{10}x_2^3 + 44x_0^9x_1x_2^3 + 264x_0^8x_1^2x_2^3$ $+1016x_0^7x_1^3x_2^3 + 2776x_0^6x_1^4x_2^3 + 5532x_0^5x_1^5x_2^3 + 8256x_0^4x_1^6x_2^3 + 9000x_0^3x_1^7x_2^3 + 7020x_0^2x_1^8x_2^3$ $+3564x_0x_1^9x_2^3 + 972x_1^{10}x_2^3 - 4x_0^8x_1x_2^4 - 12x_0^7x_1^2x_2^4 + 120x_0^5x_1^4x_2^4 + 312x_0^4x_1^5x_2^4 + 576x_0^3x_1^6x_2^4$ $+540x_0^2x_1^7x_2^4 + 324x_0x_1^8x_2^4 - 16x_0^7x_1x_2^5 - 64x_0^6x_1^2x_2^5 - 176x_0^5x_1^3x_2^5 - 192x_0^4x_1^4x_2^5 - 144x_0^3x_1^5x_2^5$ $+16x_0^5x_1^2x_2^6$

N	polinom od $C(f,g,h)$
70	$4x_0^{14}x_1^2 - 32x_0^{13}x_1^2x_2 - 10x_0^{12}x_1^3x_2 - 8x_0^{13}x_1x_2^2 + 48x_0^{12}x_1^2x_2^2 + 40x_0^{11}x_1^3x_2^2 + 32x_0^{12}x_1x_2^3$ $+84x_0^{11}x_1^2x_2^3 + 8x_0^{10}x_1^3x_2^3 + 4x_0^{12}x_2^4 + 16x_0^{11}x_1x_2^4 - 40x_0^{10}x_1^2x_2^4 + 34x_0^9x_1^3x_2^4 + 105x_0^8x_1^4x_2^4$ $-10x_0^{10}x_1x_2^5 + 76x_0^9x_1^2x_2^5 + 86x_0^8x_1^3x_2^5 + 185x_0^7x_1^4x_2^5 + 16x_0^9x_1x_2^6 - 128x_0^8x_1^2x_2^6$ $+262x_0^7x_1^3x_2^6 + 490x_0^6x_1^4x_2^6 - 120x_0^8x_1x_2^7 + 84x_0^7x_1^2x_2^7 + 960x_0^6x_1^3x_2^7 + 175x_0^5x_1^4x_2^7$ $-300x_0^4x_1^5x_2^7 - 6x_0^7x_1x_2^8 + 285x_0^6x_1^2x_2^8 + 52x_0^5x_1^3x_2^8 + 315x_0^4x_1^4x_2^8 + 100x_0^3x_1^5x_2^8$ $-54x_0^6x_1x_2^9 - 39x_0^5x_1^2x_2^9 + 764x_0^4x_1^3x_2^9 - 105x_0^3x_1^4x_2^9 - 30x_0^5x_1x_2^{10} + 418x_0^4x_1^2x_2^{10}$ $-206x_0^3x_1^3x_2^{10} + 330x_0^2x_1^4x_2^{10} + 100x_0x_1^5x_2^{10} + 125x_1^6x_2^{10} + 36x_0^4x_1x_2^{11} - 153x_0^3x_1^2x_2^{11}$ $+422x_0^2x_1^3x_2^{11} + 30x_0x_1^4x_2^{11} + 300x_1^5x_2^{11} + 18x_0^3x_1x_2^{12} + 169x_0^2x_1^2x_2^{12} - 90x_0x_1^3x_2^{12} + 225x_1^4x_2^{12}$ $+2x_0^2x_1x_2^{13} - 20x_0x_1^2x_2^{13} + 50x_1^3x_2^{13}$
75	$-x_0^5x_1^4 - 5x_0^4x_1^5 - 15x_0^3x_1^6 - 25x_0^2x_1^7 - 25x_0x_1^8 + x_0^8x_2 + 7x_0^7x_1x_2 + 28x_0^6x_1^2x_2 + 71x_0^5x_1^3x_2$ $+120x_0^4x_1^4x_2 + 115x_0^3x_1^5x_2 + 25x_0^2x_1^6x_2 - 100x_0x_1^7x_2 - 125x_1^8x_2 + 3x_0^7x_2^2 + 24x_0^6x_1x_2^2$ $+105x_0^5x_1^2x_2^2 + 285x_0^4x_1^3x_2^2 + 525x_0^3x_1^4x_2^2 + 600x_0^2x_1^5x_2^2 + 375x_0x_1^6x_2^2 + 3x_0^6x_2^3 + 21x_0^5x_1x_2^3$ $+75x_0^4x_1^2x_2^3 + 165x_0^3x_1^3x_2^3 + 200x_0^2x_1^4x_2^3 + 150x_0x_1^5x_2^3 + x_0^5x_2^4 + 5x_0^4x_1x_2^4 + 15x_0^3x_1^2x_2^4$ $+25x_0^2x_1^3x_2^4 + 25x_0x_1^4x_2^4$
81	$x_1^{13} + 18x_0x_1^{11}x_2 + 19683x_0^8x_1^3x_2^2 + 135x_0^2x_1^9x_2^2 + 513x_0^3x_1^7x_2^3 - 2187x_0^7x_1^2x_2^4 + 972x_0^4x_1^5x_2^4$ $+729x_0^5x_1^3x_2^5 + 81x_0^6x_1x_2^6 - x_0^5x_2^8$
88	$512x_0^{11}x_1^2 - 6912x_0^{10}x_1^2x_2 - 991232x_0^8x_1^4x_2 - 3748096x_0^6x_1^6x_2 + 25344x_0^9x_1^2x_2^2$ $+1208064x_0^7x_1^4x_2^2 + 241752192x_0^5x_1^6x_2^2 + 850349280x_0^3x_1^8x_2^2 + 6859484192x_0x_1^{10}x_2^2$ $-512x_0^{10}x_2^3 - 52992x_0^8x_1^2x_2^3 + 54316416x_0^6x_1^4x_2^3 + 540662848x_0^4x_1^6x_2^3 - 907039232x_0^2x_1^8x_2^3$ $+3429742096x_1^{10}x_2^3 + 2304x_0^9x_2^4 + 995520x_0^7x_1^2x_2^4 + 109809920x_0^5x_1^4x_2^4 + 761332000x_0^3x_1^6x_2^4$ $-641305082x_0x_1^8x_2^4 - 4608x_0^8x_2^5 + 7276896x_0^6x_1^2x_2^5 + 75573696x_0^4x_1^4x_2^5 + 363682440x_0^2x_1^6x_2^5$ $-214358881x_1^8x_2^5 + 5376x_0^7x_2^6 + 11398656x_0^5x_1^2x_2^6 + 32623536x_0^3x_1^4x_2^6 + 88607332x_0x_1^6x_2^6$ $-4032x_0^6x_2^7 + 7145808x_0^4x_1^2x_2^7 + 7746904x_0^2x_1^4x_2^7 + 2016x_0^5x_2^8 + 2210274x_0^3x_1^2x_2^8$ $+1942776x_0x_1^4x_2^8 - 672x_0^4x_2^9 + 231149x_0^2x_1^2x_2^9 + 144x_0^3x_2^{10} + 3009x_0x_1^2x_2^{10} - 18x_0^2x_2^{11}$ $+x_0x_2^{12}$
98	$x_0^2x_1^6 - 6x_0^2x_1^5x_2 - 2x_0x_1^6x_2 - 14x_0^3x_1^3x_2^2 - 6x_0^2x_1^4x_2^2 + 2x_0x_1^5x_2^2 + x_1^6x_2^2 + 14x_0^3x_1^2x_2^3$ $+8x_0^2x_1^3x_2^3 + 2x_0x_1^4x_2^3 + 49x_0^4x_2^4 + 14x_0^3x_1x_2^4 - 6x_0^2x_1^2x_2^4 - 2x_0x_1^3x_2^4 - 14x_0^3x_2^5 - 6x_0^2x_1x_2^5$ $+x_0^2x_2^6$

Zaključak

Koristeći metodu ulaganja modularnih krivulja u projektivnu ravninu pomoću modularnih formi, možemo kreirati mnogo modela modularnih krivulja različitih stupnjeva. Stupnjevi krivulja ovise o težini modularnih formi - forme manje težine daju modele manjeg stupnja. Dokazali smo da ukoliko je preslikavanje $\varphi : X(\Gamma) \to \mathbb{P}^2$, definirano s

$$\varphi(\mathbf{a}_z) = (f(z) : g(z) : h(z)), \quad f, g, h \in M_k(\Gamma),$$

pri čemu su f, g i h linearno nezavisne forme na modularnoj grupi Γ, biracionalna ekvivalencija, tada je stupanj dobivene krivulje $C(f, g, h)$ jednak

$$\dim M_k(\Gamma) + g(\Gamma) - 1 - \sum_{\mathbf{a} \in X(\Gamma)} \min(D_f(\mathbf{a}), D_g(\mathbf{a}), D_h(\mathbf{a})),$$

pri čemu je $M_k(\Gamma)$ vektorski prostor modularnih formi na Γ težine k, $g(\Gamma)$ genus od $X(\Gamma)$, a D_f, D_g i D_h cjelobrojni divizori pridruženi modularnim formama f, g i h. U usporedbi s literaturom, ti su stupnjevi prilično veliki, na primjer, krivulje genusa 1 su eliptičke krivulje i znamo da imaju jednadžbu stupnja 3, a ovom metodom dobivamo veće stupnjeve. Tablica 4.7 daje pregled stupnjeva za eliptičke krivulje $X_0(N)$ uz pretpostavku da su nosači divizora formi f, g i h disjunktni. U tom slučaju, stupanj krivulje $C(f, g, h)$ jednak je $\dim M_k(\Gamma)$. Prikazani su ti brojevi za $k = 2$ i $k = 12$. Ako koristimo modularne forme koje imaju zajedničke nultočke, kao što su na primjer η-kvocijenti koji imaju nultočke u kuspovima od $\Gamma_0(N)$, tada se stupanj modela smanjuje za broj zajedničkih nultočaka, brojano s multiplicitetima.

Za primjenu metode i nalaženje modela koristili smo η-kvocijente i Eisensteineov red E_4. Izračunali smo divizore svih korištenih funkcija.

Tablica 4.7: Stupnjevi modela za eliptičke krivulje $X_0(N)$

N	$\dim M_2(\Gamma_0(N))$	$\dim M_{12}(\Gamma_0(N))$
11	2	12
14	4	24
15	4	24
17	2	18
19	2	20
20	6	36
21	4	32
24	8	48
27	6	36
32	8	48
36	12	72
49	8	56

Razvili smo algoritam koji izračunava definirajuću jednadžbu krivulje koja je slika modularne krivulje i provjerava stupanj preslikavanja. U primjeni, algoritam zahtjeva da modularne forme s kojima radimo imaju racionalne koeficijente u Fourierovom razvoju. Ključni korak je određivanje ranga matrice čiji koeficijenti su polinomijalne kombinacije koeficijenata Fourierovih razvoja modularnih formi. Realnom aritmetikom nemoguće je određivanje točnog ranga matrice pa moramo koristiti cjelobrojnu aritmetiku što zahtjeva da su Fourierovi razvoji korištenih modularnih formi definirani nad poljem racionalnih brojeva. Pri cjelobrojnoj aritmetici problem je što za velike matrice računalo nema dovoljno memorije i ne uspjeva izračunati rang matrice. Za sve račune korišten je server Građevinskog fakulteta u Zagrebu, koji ima 4 procesora i 8 GB radne memorije.

Rezultati našeg istraživanja za modele krivulja $X_0(p)$, kada je p prost broj veći ili jednak 2, neki nađeni modeli i preslikavanja su sljedeći:

- prelikavanje formama težine 12

$$\mathbf{a}_z \mapsto (\Delta(z) : E_4^3(z) : \Delta(pz)), \quad \mathbf{a}_z \in X_0(p)$$

je biracionalna ekvivalencija i stupanj dobivenog modela jednak je $\Psi(p) = p + 1$

- ne možemo naći dovoljno η-kvocijenata težine 2 na $\Gamma_0(p)$

- preslikavanje formama težine 4
$$\mathbf{a}_z \mapsto \left(\frac{\eta(z)^{10}}{\eta(5z)^2} : \eta(z)^4\eta(5z)^4 : \frac{\eta(5z)^{10}}{\eta(z)^2}\right), \quad \mathbf{a}_z \in X_0(5)$$
je biracionalna ekvivalencija i stupanj dobivenog modela krivulje $X_0(5)$ jednak je 2

- preslikavanje formama težine 6
$$\mathbf{a}_z \mapsto \left(\frac{\eta(z)^{18}}{\eta(3z)^6} : \eta(z)^6\eta(3z)^6 : \frac{\eta(3z)^{18}}{\eta(z)^6}\right), \quad \mathbf{a}_z \in X_0(3)$$
je biracionalna ekvivalencija i stupanj dobivenog modela krivulje $X_0(3)$ jednak je 2

- ako prost broj p zadovoljava $p \equiv 3 \pmod 4$ i $p \equiv 1 \pmod 6$, tada je preslikavanje
$$\mathbf{a}_z \mapsto (\eta(z)^2\eta(pz)^{10} : \eta(z)^6\eta(pz)^6 : \eta(z)^{10}\eta(pz)^2), \quad \mathbf{a}_z \in X_0(p)$$
stupnja $\frac{p-1}{6}$. Posebno, u slučaju $p = 7$ to je preslikavanje biracionalna ekvivalencija i dobivamo model od $X_0(7)$ stupnja 2.

- za $p \geq 3$ preslikavanje formama težine 12
$$\mathbf{a}_z \mapsto (\Delta(z) : \eta(z)^{12}\eta(pz)^{12} : \Delta_p(z)), \quad \mathbf{a}_z \in X_0(p)$$
je stupnja $\frac{p-1}{2}$ i daje model krivulje $X_0(3)$ stupnja 2.

Pronašli smo one η-kvocijente koji imaju nulu maksimalnog reda u kuspu ∞ i klasificirali kada oni postoje. Za p^n, kada je $p = 2, 3, 5, 7, 13$ te brojeve N oblika $2^n3^m, 2^n5^m, 2^n13^m, 3^n5^m$ ili $2^n3^m7^r$ dokazali smo da je preslikavanje definirano tim η-kvocijentom i formama Δ i Δ_N biracionalna ekvivanlencija krivulje $X_0(N)$ i krivulje u projektivnoj ravnini i time dobili model od $X_0(N)$ stupnja $\dim M_{12}(\Gamma_0(N)) + g(\Gamma_0(N)) - 2$. Pretpostavljamo da je za svaki N za koji postoji takav η-kvocijent preslikavanje definirano tim kvocijentom i formama Δ i Δ_N biracionalna ekvivalencija no tu tvrdnju nismo dokazali.

U slučaju kada $\Gamma_0(N)$ nema eliptičkih točaka i N je složen broj našli smo modele krivulja $X_0(N)$ za 30 vrijednosti broja N i definirajuće polinome tih modela. Koristili smo η-kvocijente težine 2. Pod navedenim uvjetima η-kvocijenti težine 2 generiraju prostor svih modularnih formi na $\Gamma_0(N)$ težine 2. Tablica 4.8 daje neke od funkcija koje smo koristili i stupnjeve dobivenih modela.

Tablica 4.8: Funkcije težine 2 koje daju modele od $X_0(N)$ i stupnjevi tih modela

N	funkcije	stupanj modela
12	$f=\eta(2z)^{-4}\eta(4z)^{8}$ $g=\eta(6z)^{-4}\eta(12z)^{8}$ $h=\eta(z)^{8}\eta(2)^{-4}$	4
14	$f=\eta(z)^{-3}\eta(2z)^{5}\eta(7z)^{5}\eta(14z)^{-3}$ $g=\eta(z)^{5}\eta(2z)^{-3}\eta(7z)^{-3}\eta(14z)^{5}$ $h=\eta(z)^{4}\eta(2z)^{-2}\eta(7z)^{4}\eta(14z)^{-2}$	4
15	$f=\eta(z)^{4}\eta(3z)^{-2}\eta(5z)^{-2}\eta(15z)^{4}$ $g=\eta(z)^{-2}\eta(3z)^{4}\eta(5z)^{4}\eta(15z)^{-2}$ $h=\eta(z)^{3}\eta(3z)^{-1}\eta(5z)^{3}\eta(15z)^{-1}$	4
18	$f=\eta(z)^{6}\eta(3z)^{-2}$ $g=\eta(2z)^{6}\eta(6z)^{-2}$ $h=\eta(z)^{7}\eta(2z)^{-5}\eta(3z)^{-5}\eta(6z)^{7}$	4
24	$f=\eta(2z)^{-4}\eta(4z)^{8}$ $g=\eta(6z)^{-4}\eta(12z)^{8}$ $h=\eta(z)\eta(2z)^{-6}\eta(3z)^{-2}\eta(4z)^{8}\eta(6z)^{8}\eta(8z)^{-2}\eta(12z)^{-6}\eta(24z)^{2}$	5
28	$f=\eta(14z)^{-4}\eta(28z)^{8}$ $g=\eta(2z)^{5}\eta(4z)^{-3}\eta(14z)^{-3}\eta(28z)^{5}$ $h=\eta(2z)^{-4}\eta(4z)^{8}$	7
32	$f=\eta(16z)^{-4}\eta(32z)^{8}$ $g=\eta(4z)^{-4}\eta(9z)^{8}$ $h=\eta(z)^{4}\eta(4z)^{-1}\eta(16z)^{-1}\eta(32z)^{2}$	6
44	$f=\eta(22z)^{-4}\eta(44z)^{8}$ $g=\eta(z)^{3}\eta(4z)^{-1}\eta(11z)^{-1}\eta(44z)^{3}$ $h=\eta(4z)^{2}\eta(44z)^{2}$	8
54	$f=\eta(2z)^{6}\eta(6z)^{-2}$ $g=\eta(z)^{6}\eta(3z)^{-2}$ $h=\eta(2z)^{3}\eta(6z)^{-1}\eta(18z)^{-1}\eta(54z)^{3}$	9

Dodatak

Algoritmi u programu *Sage*

Za provedbu algoritma iz §3.6 izabran je program *Sage* iz više razloga. Besplatan je, online je i računi se odvijaju na serveru Građevinskog fakulteta(4 procesora, 8 GB radne memorije). Vrlo važna stavka je bila i to što on ima u sebi implementirane mnoge funkcije vezane za teoriju brojeva pa posebno i za modularne forme. Autor tog programa je W. Stein, a njegovo područje istraživanja su baš modularne forme, [46]. Na primjer, da bismo izračunali genus i broj kuspova za grupu $\Gamma_1(7)$ potrebno je upisati sljedeće naredbe:

```
sage: G=Gamma1(7)
      g=G.genus()
      c=G.ncusps()
      in=G.index()
      print G,',genus je jednak',g,',broj  kuspova je jednak',c,',indeks je',in
```

i program vraća

```
Congruence Subgroup Gamma1(7) ,genus je jednak 0 ,
broj  kuspova je jednak 6 ,indeks je 48
.
```

Program računa i sve kuspove na toj podgrupi, naredba

```
sage: G._find_cusps()
```

daje listu $\left[0, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \infty\right]$.

Naredba

```
sage: G.generators()
```

vraća generatore grupe $\Gamma_1(7)$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 & -4 \\ 49 & -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -13 & 5 \\ -21 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 22 & -9 \\ 49 & -20 \end{pmatrix}\right].$$

Prostori modularnih formi na $\Gamma_1(N), \Gamma_0(N)$ su također definirani. Kod:

```
sage: M=ModularForms(Gamma1(7),5)
      M,M.dimension()
```

vraća

```
(Modular Forms space of dimension 11 for Congruence Subgroup Gamma1(7)
 of weight 5 over Rational Field, 11)
```

Postoji klasa objekata Cusp koji predstavljaju kuspove (racionalni brojevi) i funkcije vezane za rad s njima. Na primjer, kod

```
sage: Cusp(Infinity).is_gamma1_equiv(Cusp(1))
```

provjerava da li je kusp ∞ ekvivalentan kuspu 1 u grupi $\Gamma_1(7)$ i odgovor je da jesu.

Kaspovi grupe $\Gamma_0(N)$ su definirani kao zasebna klasa objekata. Naredba:

```
sage: AllCusps(12)
```

vraća skup kuspova grupe $\Gamma_0(12)$ kako ih program zapisuje

$$[\texttt{(Inf)}, \texttt{(c\_\{2\})}, \texttt{(c\_\{3\})}, \texttt{(c\_\{4\})}, \texttt{(c\_\{6\})}, \texttt{(0)}].$$

U programu su također definirane brojne modularne forme. Na primjer, Eisensteinovi redovi. Kod

```
sage: eisenstein_series_qexp(4,10)
```

vraća q-ekspanziju Eisensteinovog reda E_4 do potencije 10,

$$\frac{1}{240} + q + 9q^2 + 28q^3 + 73q^4 + 126q^5 + 252q^6 + 344q^7 + 585q^8 + 757q^9 + O(q^{10}).$$

Algoritam za računanje stupnja krivulje $C(f, g, h)$ i ograničenja

Program unosi 4 podatka, prilagođen je za rad s $\eta-$kvocijentima jer se u programu računaju njihovi Fourierovi razvoji, a može se i modificirati da unosi Fourierove razvoje modularnih formi ili da se unutar programa unose njihovi razvoji. Također, minimum divizora modularnih formi izračunat je izvan programa. Algoritam u programu *Sage* izgleda ovako:

```
sage: def stupanj_krivulje(N,k,a,b,c,min):
          C=Gamma0(N)
          M=ModularForms(Gamma0(N),k)
          g=C.genus()
          r=C.ncusps()
          s=C.nu2()+C.nu3()
          prec=Gamma0(N).sturm_bound()
          D=M.dimension()+g-1-min
          for d in divisors(D):
              d1=(d+2)*(d+1)/2
              l= Integer (d*prec+1)
              A=zero_matrix(QQ,d1,l)
              f=a.qexp(l+1)
              g=b.qexp(l+1)
              h=c.qexp(l+1)
              br=0
              for i in srange(0,d+1):
                  for j in srange(d-i,-1,-1):
                      k=d-i-j
                      A[br]=(f^i*g^j*h^k).padded_list(l)
                      br=br+1
              if (A.rank()==d1-1):
                  stupanj=d
                  continue
          return stupanj
```

η-kvocijenti u programu *Sage*

U programu *Sage* implementirani su objekti koji predstavljaju η-kvocijente koji su modularne funkcije (forme težine 0) na $\Gamma_0(N)$. Po uzoru na takvu klasu objekata kreirali smo objekt koji predstavlja η-kvocijent neke parne težine $k \geq 2$.

Neka je $\sigma_0(N)$ broj pozitivnih djelitelja broja N. Svaki η-kvocijent predstavljen je uređenom $\sigma_0(N)-$torkom uređenih parova $((\delta, r_\delta))_\delta$. Na primjer, kvocijent $\eta(2z)^{-4}\eta(4z)^8$ kao modularna forma na $\Gamma_0(4)$ predstavljen je s

$$((1,0),(2,-4),(4,8)),$$

dok je kao forma na $\Gamma_0(12)$ predstavljen s

$$((1,0),(2,-4),(3,0),(4,8),(6,0),(12,0)).$$

Taj prikaz se koristi u programu *Sage*, s tim se za zapis η-kvocijenta koristi tip podataka *dictionary* (rječnik).

Kod za definiciju klase η-kvocijenata težine 2:

```
sage:
class eta_prod(SageObject):


   def __init__(self, N, rdict):
        sumR = sumDR = sumNoverDr = 0
  prod = 1
  for d in rdict.keys():
      if not (N % d==0):
         raise ValueError, "%s does not divide %s" % (d, N)


        for d in rdict.keys():
    if  rdict[d] == 0:
              continue
            sumR += rdict[d]
            sumDR += rdict[d]*d
            sumNoverDr += rdict[d]*N/d
            prod *= (N/d)**rdict[d]
```

```
        if sumR != 2:
            if sumR != 4:
                raise ValueError, "sum r_d (=%s) is not 4" % sumR
        if (sumDR % 24) != 0:
            raise ValueError, "sum d r_d (=%s) is not 0 mod 24" % sumDR
        if (sumNoverDr % 24) != 0:
            raise ValueError, "sum (N/d) r_d (=%s) is not 0 mod 24" % sumNoverDr
        if not is_square(prod):
            raise ValueError, "product (N/d)^(r_d) (=%s) is not a square" % prod

        self._N = N
        self._sumDR = sumDR # this is useful to have around
        self._rdict = rdict
        self._keys = rdict.keys()
```

Ligozatovi uvjeti se provjeravaju pri definiciji, to jest javlja se greška ako se upiše neki η-kvocijent koji ne zadovoljava uvjete, na primjer:

```
sage: a=eta_prod(12,{1:1,2:-4,3:0,4:8,6:0,12:0})
```

vraća

```
ValueError: sum r_d (=5) is not 4
```

Kod za Fourierove razvoje i divizor:

```
ssge:def qexp(self,n):
         R,q = PowerSeriesRing(ZZ, 'q').objgen()
         pr = R(1)
         eta_n = max([ (n/d).floor() for d in divisors
                        (self.level()) if self.r(d) != 0])
         eta = qexp_eta(R, eta_n)
         for d in divisors(self.level()):
```

```
            if self.r(d) != 0:
                pr *= eta(q**d)**self.r(d)
        return pr*q**(self._sumDR / ZZ(24))*( R(1).add_bigoh(n))
    def order_at_cusp(self, cusp):
        return 1/ZZ(24)/gcd(cusp.width(), self.level()/cusp.width())
         * sum( [ell*self.r(ell)/cusp.width() *
            (gcd(cusp.width(), self.level()/ell))**2
             for ell in divisors(self.level())] )
    def divisor(self):
        return FormalSum([ (self.order_at_cusp(c), c)
                     for c in AllCusps(self.level())])
```

Što se tiče Fourirovih razvoja, njih možemo lako dobiti pomoću Fourierovog razvoja Dedekindove η-funkcije, a on je pak dobiven preko Eulerove jednakosti

$$\eta(z) = q^{1/24}\left(1 + \sum_{n\geq 1}(-1)^n\left(q^{\frac{n(3n+1)}{2}} + q^{\frac{n(3n-1)}{2}}\right)\right).$$

Fourierov razvoj kvocijenta $\eta(2z)^{-4}\eta(4z)^8$ dobivamo sljedećim naredbama:

```
sage: a=eta_prod(12,{1:0,2:-4,3:0,4:8,6:0,12:0})
      a.qexp(20)
```

i rezultat je

$$q + 4q^3 + 6q^5 + 8q^7 + 13q^9 + 12q^{11} + 14q^{13} + 24q^{15} + 18q^{17} + 20q^{19} + O(q^{21}).$$

Divizor se računa po formuli i kod za divizor ovog kvocijenta je

```
sage: a.divisor()
```

i vraća `(Inf)` dakle samo kusp ∞.

Algoritam koji traži η-kvocijente koji su u $M_k(\Gamma_0(p))$ po uvjetima

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{24}(r + p(2k - r)) = a, \quad a \in \left\{0, 1, \ldots, \frac{k(p+1)}{12}\right\} \\
&\frac{1}{24}(pr + 2k - r) = b, \quad b = \frac{k(p+1)}{12} - a \\
&r \equiv 0 \pmod 2.
\end{aligned} \tag{.8}$$

u programu *Sage* ima sljedeći oblik:

```
sage:def prost_eta(p,k):
          gr=k*(p+1)/12
          r=0
          br=0
          for a in srange(floor(gr)+1):
              r=(24*a-2*k*p)/(1-p)
              if r.is_integer():
                  if r%2==0:
                     print r,2*k-r,'divizor',a,(gr-a)
                     br=br+1
     return br
```

Bibliografija

[1] S. Ahlgreen, N. Masri, J. Rouse, *Vanishing of modular forms at infinity*, Proc. Amer. Math. Soc. **137, No. 4**, (2009), 1205-1214

[2] T. M. Apostol, *Modular functions and Dirichlet series in number theory*, Springer-Verlag, New York, (1990)

[3] S. Bhattacharya, *Factorization of holomorphic eta quotients*, Ph. D. thesis, Bonn, (2014), dostupno na `http://hss.ulb.uni-bonn.de/2014/3711/3711.pdf`, pristupljeno 14. 5. 2016.

[4] S. Bhattacharya, *Finitness of simple holomorphic eta quotients of a given weight*, arXiv preprint: arXiv:1602.02825, (2016)

[5] S. Bhattacharya, *Finitness of irreducible holomorphic eta quotients of a given level*, arXiv preprint: arXiv:1602.02814, (2016)

[6] A. J. F. Biagioli, *The construction of modular forms as products of transforms of the Dedekind eta function*, Acta Arith. **54, No. 4**, (1990), 273-300

[7] R. Bröcker, K. Lauter,A. V. Sutherland, *Modular polynomials via isogeny volcanoes*, Mathematics of Computation **81**, (2012), 1201-1231

[8] D. Choi, *Spaces of modular forms generated by eta-quotients*, Ramanujan J. **14**, (2007), 69-77

[9] D. Charles, K. Lauter, *Computing modular polynomials*, LMS Journal of Computation and Mathematics, **8**, (2005), 195-204

[10] J. H. Conway, S. P. Norton, *Monstrous moonshine*, Bull. London Math. Soc. **11** (1979), 308–339

[11] F. Diamond, J. Shurman, *A first course in modular forms*, Springer, (2005)

[12] A. Enge, R. Schertz, *Constructing elliptic curves over finite fields using double eta-quotients*, Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux **16**, (2004), 555–568

[13] S. Galbraigth, *Equations for modular curves*, Ph. D. thesis, Oxford, (1996), dostupno na `https://www.math.auckland.ac.nz/~sgal018/thesis.pdf`, pristupljeno 14. 5. 2016.

[14] J. Gonzales, *Equations of hyperelliptic modular curves*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **41, No. 4**, (1991), 779-795

[15] B. Gordon, K. Hughes, *Multiplicative properties of η-products II*, A tribute to Emil Grosswald: Number Theory and related analysis, Cont. Math. Amer. Math. Soc. **143**, (1993), 415-430

[16] N. Ishida, *Generators and equations for modular function fields of principal congruence subgroups*, Acta Arith. **85, No.3** , (1998), 197-207

[17] N. Ishida, N. Ishii, *Generators and defining equation of the modular function field of the group $X_1(n)$*, Acta Arith. **01, No. 4**, (2002), 303-320

[18] M. Kazalicki, *Modularne forme*, skripta za napredni kolegij *Modularne forme*, dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/~mkazal/reprints/modularne_forme.pdf`, pristupljeno 14. 5. 2016.

[19] L. J. P. Kilford, *Generating spaces of modular forms with η-quotients*, arXiv preprint, arXiv:math/0701748, (2008)

[20] L. J. P. Kilford, W. Raji, *On generalized modular forms supported on cuspidal and elliptic points*, Ramanujan J. **27**, (2012), 285-295

[21] L. J. P. Kilford, *Modular forms - A classical and computational introduction*, Imperial College Press, (2008)

[22] G. Köhler, *Eta products and Theta series identities*, Springer, (2011)

[23] W. Kohnen, *On a certain class of modular functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **133 , No. 1**, (2005), 65-70

[24] E. Kunz, *Introduction to plane algebraic curves*, Birkhauser, (2005)

[25] S. Lang, *Introduction to modular forms*, Springer, (1995)

[26] G. Ligozat, *Courbes modulaires de genre* 1, Bull. Soc. Math. France [Memoire 43] (1972), 1-80

[27] Y. Martin, *Mutiplicative η-quotients*, Trans. Amer. Math. Soc. **348, No. 12**, (1996), 4825-4856

[28] Y. Martin, K. Ono, *Eta-quotients and elliptic curves*, Proc. Amer. Math. Soc. **125, No. 11**, (1997), 3169-3176

[29] K. McMurdy, *A Splitting Criterion for Galois Representations Associated to Exceptional Modular Forms*, Ph. D. thesis, University of California, Berkeley, (2001), dostupno na `http://phobos.ramapo.edu/~kmcmurdy/research/short_thesis.pdf`, pristupljeno 14. 5. 2016.

[30] T. Miyake, *Modular forms*, Springer- Verlag (2008)

[31] R. Miranda, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, American Mathematical Society, (1995)

[32] G. Muić, *On embeddings of curves in projective spaces*, Monatsh. Math. **138, No.2**, (2014), 239-256

[33] G. Muić, *Modular curves and bases for the spaces of cuspidal modular forms*, Ramanujan J. **27**, (2012), 181-208

[34] G. Muić, D. Mikoč, *Birational maps of $X(1) \to \mathbb{P}^2$*, Glasnik matematički **48, No. 2**, (2013), 301-312

[35] G. Muić, *On degrees and birationality of the maps $X_0(N) \to \mathbb{P}^2$ constructed via modular forms*, Montsh. Math. (to appear)

[36] N. Murabayashi, *On normal forms of modular curves of genus* 2, Osaka J. Math. **29**, (1992), 405-418

[37] M. Newman, *Construction and applications of a certain class of modular functions*, Proc. London Math. Soc (3) 7 (1956), 334-350

[38] M. Newman, *Construction and applications of a certain class of modular functions II*, Proc. London Math. Soc (3) 9 (1959), 373-387

[39] K. Ono, *The Web of Modularity: Arithmetic of the Coefficients of Modular Forms and q-series*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 102, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, (2004)

[40] D. Pathakjee, Z. Rosnbrick, E. Yoong, *Elliptic curves, eta-quotients and hypergeometric functions*, Involve **5 , No. 1**, (2012), 1–8

[41] W. Raji, *Generalized modular forms representable as eta products*, Acta Arith. **129**, (2007), 41–51

[42] J. Rouse, J.J. Webb, *On spaces of modular forms spanned by eta-quotients*, Advances in Mathematics **272**, (2015), 200-224

[43] I. R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry I: Varieties in projective space 3 rd edition*, Springer, (2013)

[44] G. Shimura, *Introduction to arithmetic theory of automorphic functions*, Publications of the Mathematical Society of Japan, vol. 11, Princeton University Press (1971)

[45] M. Shimura, *Defining equation of modular curves* $X_0(N)$, Tokyo J. Math. **18, No. 2**, (1995), 443-456

[46] W. Stein, *Modular Forms, a Computational Approach*, American Mathematical Society, (2007)

[47] Y. Yang, *Defining equations of modular curves*, Advances in Mathematics **204**, (2006), 481-508

[48] B. L. van der Waerden, *Algebra*, Volume I, Springer, (2003)

[49] D. S. Watkins, *Fundamentals of Matrix Computations*, John Wiley and Sons, Inc. New York, NY, USA, (2002)

Životopis

Iva Kodrnja rođena je 20. svibnja 1987. godine u Zaboku. Nakon završene V. gimnazije, upisuje preddiplomski studij Matematike na Prirodoslovno – matematičkom fakultetu u Zagrebu 2005. godine. Završava srednju glazbenu školu Vatroslava Lisinskog 2006. kao glazbenik – glasovirač. Nakon završenog preddiplomskog studija, 2008. godine upisuje diplomski studij Teorijske matematike na istom fakultetu. Diplomirala je 2010. godine s radom *Glatke projektivne mnogostrukosti*, pod stručnim vodstvom mentora prof. dr. sc. G. Muića i odmah nakon toga zapošljava se u Osnovnoj školi Ksavera Šandora Gjalskog u Zaboku kao profesorica matematike. Nakon godinu dana, 2011. godine upisuje Doktorski studij matematike na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu te se zapošljava kao asistentica na Zavodu za matematiku Građevinskog fakulteta u Zagrebu. Zadužena je za vođenje vježbi iz kolegija *Deskriptivna geometrija, Perspektiva* i *Matematički programi za inženjere*, a održavala je i vježbe iz kolegija *Matematika 1, Matematika 2* te *Osnove inženjerske matematike 2*.

Članica je Hrvatskog društva za geometriju i grafiku. Prisustvovala je ljetnoj školi GEFFA (Geometry education for future architects) pod vodstvom prof. dr. sc. D. Lordicka u Rijeci 2012. godine u organizaciji DAAD-a. Prisustvovala je na tri konferencije Hrvatskog društva za geometriju i grafiku, 2013. godine u Rastokama s predavanjem *Modelling some ruled surfaces in Rhino and Grasshopper*, 2014. godine u Supetru s predavanjem *Perspective – optional course for master student at the Faculty of Civil Engineering in Zagreb* te posterom *Students' assignments – Perspective* zajedno sa S. Gorjanc te 2015. u Belom Manstiru s predavanjem *Projective Models for Riemann Surfaces*. Sudjelovala je na konferenciji *Young Women in Algebraic Geometry* s posterom *Models for Modular Curves*. Suradnica je na znanstvenom projektu Hrvatske zaklade za znanost *Automorfne forme, reprezentacije i primjene* koji vodi prof. dr. sc. G. Muić. Koautorica je na jednom stručnom radu

- E. Šamec, I. Kodrnja, *Familija ploha Heltocat*, KoG **19** (2015), 57-65.