13. SFERNA TRIGONOMETRIJA

UVOD

Trigonometrija je dio geometrije unutar koje se proučavaju odnosi između stranica i kutova u ravninskom i sfernom trokutu pomoću trigonometrijskih funkcija. Trigonometrijskim funkcijama se, kao što znamo, računaju elementi trokuta, svojstva periodičnih pojava te izvode druge funkcije.

Sferna trigonometrija je trigonomrtrija na kuglinoj površini (sferi).

Sferna se trigonometrija počela razvijati prije ravninske (obične) trigonometrije i to iz potreba navigacije, astronomije itd. Danas ima veliku važnost u pomorskoj, zrakoplovnoj i satelitskoj navigaciji, astronomiji, geofizici itd.

Osnovni pojmovi

Sfera je skup svih točaka prostora koje su jednako udaljene od čvrste točke O, koja se zove *središte* ili *centar sfere*, a ta udaljenost *radijus R sfere.* Oznaka: $S(O;R)$.

Standardna sfera je sfera s centrom u ishodištu prostornog koordinatnog sustava, radijusa 1. Oznaka: $S(O;1)$.

Glavna ili *velika kružnica* sfere je kružnica koju dobivamo ako sferu presječemo ravninom kroz njeno središte, a čiji je radijus jednak radijusu sfere.

Orijentirana glavna kružnica sfere je glavna kružnica na kojoj je odabran smjer (pozitivan, negativan).

$\Rightarrow$ Svaki presjek sfere polumjera R nekom ravninom je kružnica polumjera r; $0 \leq r \leq R$.
$r = 0 \Rightarrow$ kružnica se steže na točku,
$r = R \Rightarrow$ glavna kružnica.
Presječna kružnica može biti i imaginarna.

Antipodalne točke glavne kružnice su njene dijametralno suprotne točke. Ozačavamo ih C i C' ili C i $-C$.

$\Rightarrow$ Za svake dvije točke A, B sfere $S(O;R)$ koje nisu dijametralno suprotne postoji jedinstvena glavna kružnica na kojoj one leže. Ta se kružnica dobiva kao presjek sfere i ravnine točkama A, B i središtem sfere O.

$\Rightarrow$ Kroz dvije dijametralno suprotne točke prolazi beskonačno mnogo glavnih kružnica.

Udaljenost točaka $A, B \in S(O;R)$ se definira kao duljina manjeg luka $\overset{\frown}{AB}$ glavne kružnice kroz A i B. Luk $\overset{\frown}{AB}$ određuje kut $\angle AOB = \alpha$.

Duljina luka $\overset{\frown}{AB}$, za kut α izmjeren u radijanima: $|\overset{\frown}{AB}| = R \cdot \alpha$.

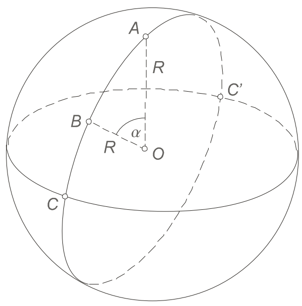
Duljina luka $\overset{\frown}{AB}$, za kut α izmjeren u stupnjevima: $|\overset{\frown}{AB}| = R \cdot \alpha \cdot \dfrac{\pi}{180°}$.

Na standardnoj sferi: $|\overset{\frown}{AB}| = \alpha$, odnosno $|\overset{\frown}{AB}| = \alpha \cdot \dfrac{\pi}{180°}$.

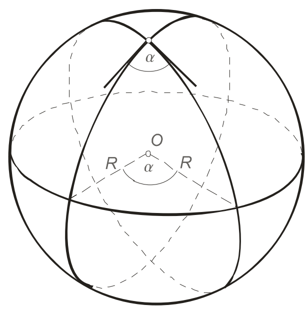
Geodetska krivulja je najkraća spojnica dviju točaka neke plohe.

$\Rightarrow$ Geodetske krivulje na sferi su glavne kružnice.

Sferni dvokut. Dvije glavne kružnice dijele površinu sfere na četiri dijela, na četiri dvokuta, od kojih su dva i dva nasuprotna međusobno jednaka. Drugim riječima, dvokut je dio sfere među dvjema glavnim polukružnicama.
Točke u kojima se sijeku glavne kružnice koje omeđuju dvokut zovu se *vrhovi* dvokuta.
Dvokut je određen *kutom* dvokuta, tj. kutom između glavnih kružnica koje ga omeđuju, odnosno tangentama na te kružnice u njegovim vrhovima. Označimo li s α kut dvokuta, onda je $0 < \alpha < \pi$.



Dvije glavne kružnice sfere



Sferni dvokut

Zadatak. Izračunati površinu P_α sfernog dvokuta s kutom α u lučnoj mjeri.

Površina P_α ovisi o kutu α i polumjeru R sfere, tj. $P_\alpha = P_\alpha(\alpha, R)$.
Neka je P_S površina sfere, $P_S = 4R^2\pi$.
Iz omjera

$$\alpha : 2\pi = P_\alpha : P_S \quad \Rightarrow \quad P_\alpha = P_S \cdot \frac{\alpha}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad P_\alpha = 2R^2\alpha .$$

Ako je kut α izmjeren u stupnjevima, $P_\alpha = 2R^2\alpha \cdot \dfrac{\pi}{180°}$.

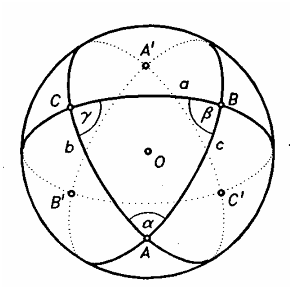
Usporedba geometrije na sferi s onom u ravnini

Prije daljnjeg upoznavanja s pojmovima i odnosima među elementima i geometrijskim tvorevinama na sferi, usporedimo neke od njih s onima u ravnini.

U ravnini	**Na sferi**
- točka	- točka
- geodetska krivulja je pravac	- geodetska krivulja je glavna kružnica
- kružnica	- sporedna kružnica
- dužina	- luk glavne kružnice
- kut između dva pravca	- kut dviju glavnih kružnica
− jednom točkom izvan zadanog pravca prolazi samo jedna paralela s tim pravcem	− dvije se glavne kružnice uvijek sijeku i to u dvije antipodalne točke
− pravac je neograničen	− glavna kružnica je ograničena
− itd.	− itd.
$\Rightarrow$ Euklidska geometrija	$\Rightarrow$ geometrija na sferi spada u tzv. neeuklidske geometrije

Za detaljniju usporedbu i upoznavanje s Euklidskom i neeuklidskim geometrijama vidi npr. [Hanžek].

SFERNI TROKUT



Definicija

Neka su $A,B,C \in S(O;R)$ tri točke koje ne leže na istoj glavnoj kružnici i nikoje dvije nisu antipodalne točke. Spojimo li te tri točke trima lukovima glavnih kružnica, onda se dio sfere omeđen tim lukovima zove *sferni trokut* s *vrhovima A, B, C* i obilježava $\triangle ABC$.

Napomena: Podrazumijevamo da su glavne kružnice orijentirane, jer bi u protivnom mogli promatrati 8 sfernih trokuta.

Elementi sfernog trokuta:

$\overset{\frown}{AB} = c$ *A’, B’, C’* – antipodalne točke točaka *A, B, C*

$\overset{\frown}{BC} = a$ α, β, γ – kutovi sfernog trokuta

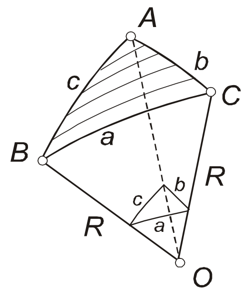
$\overset{\frown}{CA} = b$ – kutovi među stranicama tj. među tangentama na glavne kružnice u vrhovima trokuta

Vrijedi: – dva sferna trokuta su sukladna ako su im odgovarajući elementi jednaki, tj. $a = a', b = b', c = c', \alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$;

– dijametralno suprotni trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ su sukladni, što označavamo $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$;

– iz definicije sfernog trokuta slijedi da za stranice i kutove sfernog trokuta na sferi $S(O;R)$ vrijedi: $0 < a,b,c < R\pi, \quad 0 < \alpha,\beta,\gamma < \pi$.

Definicija
Sferni trobrid je figura koja nastaje kad vrhove sfernog trokuta spojimo s centrom sfere.



OA, OB, OC – bridovi trobrida
OAB, OBC, OCA – strane trobrida

Vrijedi: Za standardnu sferu je ispunjeno kako slijedi

$$S(O;1) \Rightarrow \begin{cases} a = |\overset{\frown}{BC}| \Rightarrow \angle(COB) = a \cdot 1 = a, \\ b = |\overset{\frown}{AC}| \Rightarrow \angle(AOC) = b, \\ c = |\overset{\frown}{AB}| \Rightarrow \angle(AOB) = c. \end{cases}$$

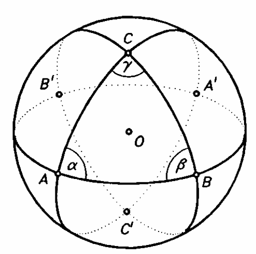
Svojstva sfernog trokuta

Teorem

1) $a + b > c, \ |a - b| < c$;
2) $\alpha + \beta < \gamma + \pi$;
3) $a = b \Leftrightarrow \alpha = \beta$, tj. nasuprot jednakim stranicama leže jednaki kutovi i obratno;
4) $a < b \Leftrightarrow \alpha < \beta$, tj. nasuprot većoj (manjoj) stranici leži veći (manji) kut i obratno;
5) Suma kutova u sfernom trokutu: $\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$,
   Suma stranica u sfernom trokutu: $0 < a + b + c < 2R\pi$.

Dokaz

Tvrdnje dane ovim teoremom se provjeravaju poučcima koji slijede, a mogu se naći npr. u [Pavković, Veljan], ili [Hanžek]. Mi ćemo provjeriti istinitost tvrdnje 5.
Dokažimo kao prvo da za stranice u sfernom trokutu standardne sfere (R = 1) vrijedi relacija $0 < a + b + c < 2\pi$.
Zadani sferni trokut nadopunimo preko svake njegove stranice na odgovarajući sferni dvokut (vidi sliku). Ova nadopuna daje nam tri nova sferna trokuta I, II, III na koje ćemo primijeniti prvu tvrdnju ovog teorema, tj.

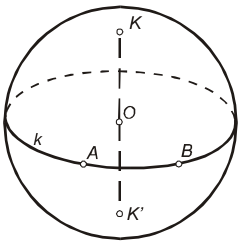


$$\left.\begin{array}{l}\pi - c + \pi - b > a > 0\\ \pi - a + \pi - c > b > 0\\ \pi - b + \pi - a > c > 0\end{array}\right| +$$

$$\Rightarrow \; 0 < a + b + c < 2\pi . \square$$

Za dokaz druge nejednakosti treba nam pojam *polarnog trokuta*.

Polarni trokut



Neka je $\overset{\frown}{AB}$ luk na pozitivno orijentiranoj glavnoj kružnici k sfere. Točka K sfere koja se nalazi na dijametru sfere koji je okomit na ravninu te glavne kružnice, u pozitivnom smjeru, zove se *pol* luka $\overset{\frown}{AB}$, odnosno *pol* kružnice k. Kružnica k zove se polara, a pridruživanje $k \leftrightarrow K$ *polaritet.*

Neka je $\triangle ABC$ sferni trokut i neka su redom:

A' – pol luka $\overset{\frown}{BC}$, tj. stranice a

B' – pol luka $\overset{\frown}{CA}$, tj. stranice b

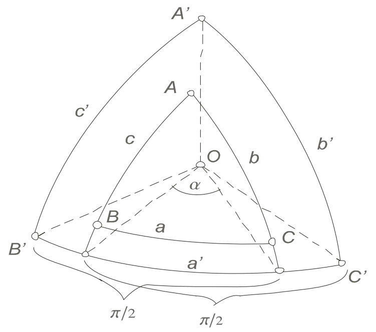
C' – pol luka $\overset{\frown}{AB}$, tj. stranice c.

$\Rightarrow$ *polarni trokut* $\triangle A'B'C'$.

Za trokute $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ kažemo da su *međusobno polarni*.

Nije teško pokazati da za elemente $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$ polarnog trokuta vrijede relacije:

$$\left.\begin{aligned}\alpha + a' &= \pi\\ \beta + b' &= \pi\\ \gamma + c' &= \pi\end{aligned}\right\} \quad \text{i} \quad \left.\begin{aligned}\alpha' + a &= \pi\\ \beta' + b &= \pi\\ \gamma' + c &= \pi\end{aligned}\right\}.$$



Na primjer, $a' = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \alpha = \pi - \alpha$, itd.

Dokažimo sada da za svaki sferni trokut vrijedi $\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$. Primijenimo dokazanu nejednakost $0 < a + b + c < 2\pi$ na polarni trokut $\triangle A'B'C'$:

$$0 < a' + b' + c' < 2\pi$$
$$0 < \pi - \alpha + \pi - \beta + \pi - \gamma < 2\pi$$
$$\Rightarrow\ 0 < 3\pi - (\alpha + \beta + \gamma) < 2\pi \ \Rightarrow\ -3\pi < -(\alpha + \beta + \gamma) < -\pi \ \Rightarrow\ \pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi . \square$$

Sferni eksces i sferni defekt
Iz tvrdnje 5) slijedi da je suma kutova u sfernom trokutu veća od π. Razlika sume kutova i π je kut koji se zove *sferni eksces* i označava s ε, tj. $\underline{\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi}$.

Osim toga iz 5) slijedi da je suma stranica u sfernom trokutu na standardnoj sferi manja od 2π. Razlika između 2π i sume stranica je veličina koja se zove *sferni defekt* i označava s *d*, tj. $\underline{d = 2\pi - (a + b + c)}$.

Teorem
Površina *P* sfernog trokuta jednaka je umnošku sfernog ekscesa i kvadrata radijusa sfere, tj. $P = \varepsilon R^2$.

Dokaz
Promatramo $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$. Nadopunimo $\triangle ABC$ na dvokute i odredimo im površinu:

$$\left.\begin{aligned}P + P(A'BC) &= 2R^2\alpha\\ P + P(B'AC) &= 2R^2\beta\\ P + P(C'BA) &= 2R^2\gamma\end{aligned}\right| +$$

$$\overline{3P + P(A'BC) + P(B'AC) + P(C'BA) = 2R^2(\alpha + \beta + \gamma)} \qquad (*)$$

Trokuti $\triangle ABC$, $\triangle A'BC$, $\triangle B'AC$, $\triangle C'BA$ čine polusferu pa je zbroj njihovih površina jednak polovici površine sfere, tj.

$$P + P(A'BC) + P(B'AC) + P(C'BA) = 2R^2\pi .$$

Uvrstimo li to u (*) slijedi

$$P = R^2(\alpha + \beta + \gamma) = R^2\varepsilon . \square$$

<u>Napomena</u>

Ako su kutovi izmjereni u stupnjevima, površina sfernog trokuta dana je sa: $P = R^2\varepsilon \cdot \dfrac{\pi}{180}$.

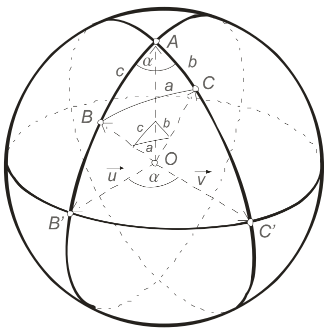
OSNOVNE VEZE MEĐU ELEMENTIMA SFERNOG TROKUTA

Teorem (kosinusov poučak za stranice)

(1) $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$;

(2) $\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos\beta$;

(3) $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma$.



Dokaz

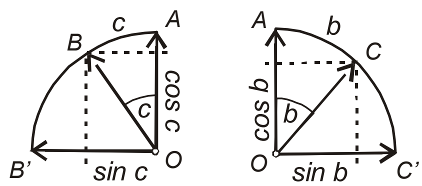
Ad (1) Neka je sfera standardna, tj.

$$S(O;1) \Rightarrow |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1 .$$

Neka su $\vec{u} = \overrightarrow{OB'}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OC'}$, $\vec{u} \perp \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} \perp \overrightarrow{OA}$ $\Longrightarrow$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos\alpha = \cos\alpha$.

Izrazimo $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ pomoću $\vec{u}, \vec{v}$ i $\overrightarrow{OA}$.

Iz slika



slijedi

$\overrightarrow{OB} = \cos c \;\overrightarrow{OA} + \sin c\, \vec{u}$, $\overrightarrow{OC} = \cos b \;\overrightarrow{OA} + \sin b \vec{v}$, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 1 \cdot 1 \cdot \cos a = \cos a$,

tj. $\cos a = \left(\cos c \;\overrightarrow{OA} + \sin c\, \vec{u}\right) \cdot \left(\cos b \;\overrightarrow{OA} + \sin b \vec{v}\right) = \cdots = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$.$\square$

Teorem (sinusov poučak)

Sinusi kutova sfernog trokuta odnose se kao sinusi nasuprotnoh stranica, tj.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a}=\frac{\sin\beta}{\sin b}=\frac{\sin\gamma}{\sin c}.$$

Drugi zapis sinusovog poučka: $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \sin a : \sin b : \sin c$.

Dokaz
Iz kosinusovog poučka za stranice imamo da je

$$\cos\alpha=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}.$$

Upotrijebimo gornju jednakost da bismo izračunali

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 a}=\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2 a}=\cdots\cdots=\frac{1-\cos^2 b-\cos^2 c-\cos^2 a+2\cos a\cos b\cos\beta}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c}.$$

Analogno, uz

$$\cos\beta=\frac{\cos b-\cos c\cos a}{\sin c\sin a}\ \text{ i }\ \cos\gamma=\frac{\cos c-\cos a\cos b}{\sin a\sin b}$$

dobivamo

$$\frac{\sin^2\beta}{\sin^2 b}=\frac{1-\cos^2\beta}{\sin^2 b}=\cdots\cdots=\frac{1-\cos^2 b-\cos^2 c-\cos^2 a+2\cos a\cos b\cos\beta}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c},\ \text{i}$$

$$\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2 c}=\frac{1-\cos^2\gamma}{\sin^2 c}=\cdots\cdots=\frac{1-\cos^2 b-\cos^2 c-\cos^2 a+2\cos a\cos b\cos\beta}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c}.$$

Jednakost desnih strana $\Rightarrow\ \dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2 a}=\dfrac{\sin^2\beta}{\sin^2 b}=\dfrac{\sin^2\gamma}{\sin^2 c}\ \Rightarrow\ \dfrac{\sin\alpha}{\sin a}=\dfrac{\sin\beta}{\sin b}=\dfrac{\sin\gamma}{\sin c}$. $\square$

Teorem (kosinusov poučak za kutove)

U sfernom trokutu vrijedi

(1) $\cos\alpha=-\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos a$,

(2) $\cos\beta=-\cos\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\sin\alpha\cos b$,

(3) $\cos\gamma=-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos c$.

Dokaz
Neka je $\Delta A'B'C'$ polarni trokut trokuta ΔABC.
Po kosinusovom poučku za stranice za $\Delta A'B'C'$ slijedi

$$\cos a'=\cos b'\cos c'+\sin b'\sin c'\cos\alpha',\ \text{tj.}$$

$$\cos(\pi-\alpha)=\cos(\pi-\beta)\cos(\pi-\gamma)+\sin(\pi-\beta)\sin(\pi-\gamma)\cos(\pi-a).$$

Računom slijedi

$$\cos\alpha=-\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos a.$$

Analogno se provjeravaju i druge dvije formule. $\square$

Teorem (kotangensovi stavci)
U sfernom trokutu vrojedi

(1) $\underline{ctgb\ sin\,c = cos\,c\ cos\,\alpha + sin\,\alpha\ ctg\beta}$,
(2) $ctgc\ sin\,a = cos\,a\ cos\,\beta + sin\,\beta\ ctg\gamma$,
(3) $ctga\ sin\,b = cos\,b\ cos\,\gamma + sin\,\gamma\ ctg\alpha$,
(4) $ctgc\ sin\,b = cos\,b\ cos\,\alpha + sin\,\alpha\ ctg\gamma$,
(5) $ctga\ sin\,c = cos\,c\ cos\,\beta + sin\,\beta\ ctg\alpha$,
(6) $ctgb\ sin\,a = cos\,a\ cos\,\gamma + sin\,\gamma\ ctg\beta$.

Dokaz
Po kosinusovom poučku za stranice i sinusovom poučku slijedi

$cos\,b = \underline{cos\,a}\ cos\,c + \underline{sin\,a}\ sin\,c\ cos\,\beta$,

$cos\,a = cos\,b\ cos\,c + sin\,b\ sin\,c\ cos\,\alpha$ i

$$sin\,a = \frac{sin\,b\ sin\,\alpha}{sin\,\beta}.$$

Uvrstimo li izraze za $sin\,a$ i $cos\,a$ iz druge i treće jednakosti u prvu, dobivamo

$$cos\,b = \left(cos\,b\ cos\,c + sin\,b\ sin\,c\ cos\,\alpha\right)\ cos\,c + \left(\frac{sin\,b\ sin\,\alpha}{sin\,\beta}\right) sin\,c\ cos\,\beta.$$

Nakon sređivanja i zamjenivši $\left(1 - cos^2 c\right)$ sa $sin^2 c$ prethodna jednakost poprima oblik

$cos\,b\ sin\,c = sin\,b\ cos\,c\ cos\,\alpha + sin\,b\ ctg\beta\ sin\,\alpha$,

odakle, dijeljenjem sa $sin\,b$ dobivamo jednakost (1).
Analogno se provjeravaju i ostali stavci. □

Formule za polovine kutova (*S* – formule)

Da bismo odredili formule za polovine kutova, koje su za rješavanje zadataka vezanih uz sferni trokut od izuzetnog značaja, krenimo od prve relacije iz kosinusovog poučka za stranice, tj.

$$cos\,a = cos\,b\,cos\,c + sin\,b\ sin\,c\ cos\,\alpha \quad \Rightarrow \quad cos\,\alpha = \frac{cos\,a - cos\,b\,cos\,c}{sin\,b\ sin\,c}.$$

Izračunajmo

$$2\,sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - cos\,\alpha = 1 - \frac{cos\,a - cos\,b\,cos\,c}{sin\,b\ sin\,c} = \cdots = \frac{2\,sin\dfrac{a+b-c}{2}\cdot sin\dfrac{a-b+c}{2}}{sin\,b\ sin\,c}.$$

Uz kraticu: $2s = a + b + c$,

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(s-a) = -a + b + c \\ 2(s-b) = a - b + c \\ 2(s-c) = a + b - c \end{cases}.$$

Upotrijebimo li gornje oznake,

$$sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{sin(s-b)\cdot sin(s-c)}{sin\,b\ sin\,c}, \qquad (*)$$

i analogno $$cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{sin\,s\cdot sin(s-a)}{sin\,b\ sin\,c}. \qquad (**)$$

(*) : (**) $\Rightarrow$

$$tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{sin(s-b)\,sin(s-c)}{sin\,s\,\,sin(s-a)}$$

$$tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{sin(s-a)\,sin(s-b)\,sin(s-c)}{sin\,s\,\,sin^2(s-a)}$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{sin(s-a)}\sqrt{\frac{sin(s-a)\,sin(s-b)\,sin(s-c)}{sin\,s}}$$

Označimo li: $k=\sqrt{\dfrac{sin(s-a)\,sin(s-b)\,sin(s-c)}{sin\,s}}$, slijede formula polovine kuta

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{k}{sin(s-a)},\quad \text{i analogno}\quad tg\frac{\beta}{2}=\frac{k}{sin(s-b)},\quad tg\frac{\gamma}{2}=\frac{k}{sin(s-c)}\,.$$

Vrijednost k ima geometrijsko značenje, tj.

$k=tg\,r_u$, gdje je

r_u - *sferni polumjer upisane kružnice*

$$r_u=tg^{-1}(k)=tg^{-1}\left(\sqrt{\frac{sin(s-a)\,sin(s-b)\,sin(s-c)}{sin\,s}}\right).$$

Formule za polovine stranica (ω – formule)

Formule za polovine stranica izvode se iz kosinusovog poučka za kutove, ponavljajući izvod formula za polovine kutova.

Na kraju se dobivaju formule

$$tg\frac{a}{2}=cos(\omega-\alpha)\cdot K,\quad tg\frac{b}{2}=cos(\omega-\beta)\cdot K,\quad tg\frac{c}{2}=cos(\omega-\gamma)\cdot K$$, gdje je

$$K=\sqrt{\frac{-cos\,\omega}{cos(\omega-\alpha)\,cos(\omega-\beta)\,cos(\omega-\gamma)}}\,.$$

Geometrijsko značenje vrijednosti K:

$K=tg\,r_o$, gdje je

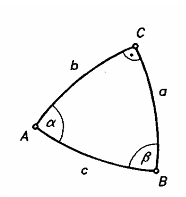
r_o - *sferni polumjer opisane kružnice*

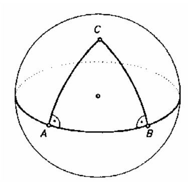
$$r_o=tg^{-1}(K)=tg^{-1}\left(\sqrt{\frac{-cos\,\omega}{cos(\omega-\alpha)\,cos(\omega-\beta)\,cos(\omega-\gamma)}}\right).$$

PRAVOKUTNI SFERNI TROKUT

Pravokutni sferni trokut je sferni trokut koji ima bar jedan pravi kut.
Za razliku od trokuta u ravnini, sferni trokut može imati dva pa i tri prava kuta.

Nazive prenosimo iz ravne trigonometrije: *a, b* – katete; *c* – hipotenuza.





Formule pravokutnog trokuta

Kosinusov poučak za stranice $\left(\gamma = \frac{\pi}{2}\right)$: $\underline{\cos c = \cos a \cos b}$; "*sferni Pitagorin poučak*"

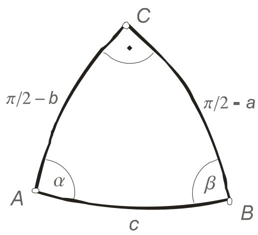
Sinusov poučak $\left(\gamma = \frac{\pi}{2}\right)$: $\underline{\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}, \quad \sin\beta = \frac{\sin b}{\sin c}}$.

Sve formule za pravokutni sferni trokut možemo lako zapisati i pamtiti pomoću matematičkog pravila poznatog pod nazivom *Napierovo pravilo*.

Napierovo pravilo

John Napier (1550 - 1617), škotski matematičar

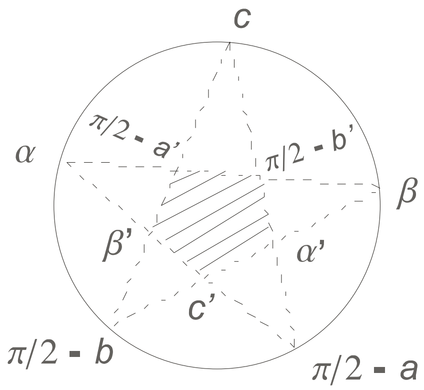
Pravokutni sferni trokut $\triangle ABC$.
Elementi trokuta: α, β - kutovi
$\frac{\pi}{2} - a, \frac{\pi}{2} - b$ - katete; c – hipotenuza



Za svaki od 5 elemenata na slici imamo 2 susjedna i 2 nesusjedna elementa, npr. za element β susjedni su c i $\frac{\pi}{2} - a$, a nesusjedni α i $\frac{\pi}{2} - b$.
Pravilo:

Kosinus svakog elementa pravokutnog sfernog trokuta jednak je produktu kotangensa susjednih elemenata, a jednak je i produktu sinusa nesusjednih elemenata.

Napierovo kolo:



Prema pravilu, iz kola čitamo sve formule za pravokutni sferni trokut (10 formula):

$$\begin{cases} \cos c = ctg\alpha\ ctg\beta \\ \cos c = \sin\left(\frac{\pi}{2}-b\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \cos a \cos b \end{cases},$$

$$\begin{cases} \cos\beta = ctg\left(\frac{\pi}{2}-a\right) ctgc = tga\ ctgc \\ \cos\beta = \sin\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2}-b\right) = \sin\alpha \cos b \end{cases},$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \sin a \;\Rightarrow\; \begin{cases} \sin a = ctg\beta\ ctg\left(\frac{\pi}{2}-b\right) = ctg\beta\ tgb \\ \sin a = \sin\alpha\ \sin c \end{cases},$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-b\right) = \sin b \;\Rightarrow\; \begin{cases} \sin b = ctg\alpha\ ctg\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = ctg\alpha\ tga \\ \sin b = \sin\beta\ \sin c \end{cases},$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = ctg\left(\frac{\pi}{2}-b\right) ctgc = tgb\ ctgc \\ \cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\ \sin\beta = \cos a \sin\beta \end{cases}.$$

Napomenimo da je John Napier uveo prirodne logaritme, tj. logaritme s bazom $e = 2{,}71828182\ldots$.

Neka svojstva pravokutnog sfernog trokuta

Svojstva koja ćemo navesti slijede iz odnosa za kutove sfernog trokuta ili iz deset formula pravokutnog sfernig trokuta. Dokazi tih svojstava nisu teški i mogu se naći npr. u [Hanžek] ili [Justinijanović].

Neka je dan pravokutni sferni trokut $\triangle ABC$, kojemu su α, β - kutovi, a, b - katete i c - hipotenuza. Tada vrijedi:

1. $tg\frac{\varepsilon}{2} = tg\frac{a}{2} \cdot tg\frac{b}{2}$;
2. $\alpha - \beta < \frac{\pi}{2} < \alpha + \beta$;
3. $\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{3\pi}{2}$;
4. Kateta i njoj nasuprotni kut su uvijek istovrsni, tj. ili obje veličine leže u prvom ili obje leže u drugom kvadrantu;
5. Kateta je manja od nasuprotnog kuta ako su oba oštri kutovi, a veća ako su oba tupi kutovi. Drugim riječima kateta, izražena u stupnjevima, mora ležati dalje od $90°$ od njoj nasuprotnog kuta;
6. Hipotenuza je po veličini uvijek između katete i njenog suplementa;
7. Hipotenuza je oštri kut ako su katete istovrsne, tj. sve tri stranice izražene su kutovima iz prvog kvadranta;
8. Hipotenuza je tupi kut ako su katete raznovrsne, tj. samo jedna stranica je iz prvog kvadranta a ostale dvije su iz drugog kvadranta;
9. Hipotenuza je pravi kut ako je barem jedna kateta pravi kut;
10. Pravokutni sferni trokut može imati dva pa i tri prava kuta.

RJEŠAVANJE SFERNOG TROKUTA

Riješiti sferni trokut znači iz tri zadana elementa odrediti ostale elemente. Na primjer, ako zadamo tri stranice *a, b, c* sfernog trokuta, kutove α, β, γ možemo izračunati iz kosinusovog poučka za stranice. Ako su zadani kutovi α, β, γ stranice *a, b, c* sfernog trokuta možemo izračunati iz kosinusovog poučka za kutove.

Osim poučaka i stavaka s kojima smo se do sada upoznali, prilikom rješavanja sfernog trokuta često se upotrebljavaju *D'Alambertove* i *Napierove formule* kao i *L'Huillierova formula* za sferni eksces.

D'Alambertove formule
Jean D'Alambert (1717-1783), francuski matematičar, fizičar i filozof.

$$sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{cos\frac{a-b}{2}}{cos\frac{c}{2}} = cos\frac{\gamma}{2}, \quad sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{sin\frac{a-b}{2}}{sin\frac{c}{2}} = cos\frac{\gamma}{2},$$

$$cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{cos\frac{a+b}{2}}{cos\frac{c}{2}} = sin\frac{\gamma}{2}, \quad cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{sin\frac{a+b}{2}}{sin\frac{c}{2}} = sin\frac{\gamma}{2}.$$

Formule se dokazuju, počevši od kosinusovog poučka za stranice, primjenom lakih transformacija.

Napierove formule

$$tg\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{cos\frac{a-b}{2}}{cos\frac{a+b}{2}}ctg\frac{\gamma}{2}, \qquad tg\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{sin\frac{a-b}{2}}{sin\frac{a+b}{2}}ctg\frac{\gamma}{2},$$

$$tg\frac{a+b}{2}=\frac{cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\;tg\frac{c}{2}, \qquad tg\frac{a-b}{2}=\frac{sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\;tg\frac{c}{2}.$$

Ove se formule dokazuju iz D'Alambertovih dijeljenjem odgovarajućih formula.

L'Huilierova formula
Simon A. J. L'Huilier (1750-1840), švicarski matematičar

Ako su zadane stranice *a, b, c* sfernog trokuta i označimo li $2s = a+b+c$ (opseg trokuta), sferni eksces ε dan je formulom

$$tg\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{tg\frac{s}{2}\,tg\frac{s-a}{2}\,tg\frac{s-b}{2}\,tg\frac{s-c}{2}}\;.$$

I ova se formula dokazuje iz D'Alambertovih formula.

Vratimo se rješavanju sfernog trokuta. Budući da tri od šest elemenata $a,\ b,\ c, \alpha, \beta, \gamma$ sfernog trokuta potpuno određuju sferni trokut, postoji $\binom{6}{3}=20$ različitih kombinacija zadataka o trokutu. Međutim, svi zadaci s jednakim međusobnim položajem stranica i kutova čine isti tip zadatka, pa preostaje samo šest tipova različitih zadataka od kojih si dva i dva odgovaraju polarno. Osim toga, pri rješavanju zadataka ne smijemo zaboraviti na uvjete koje moraju zadovoljiti zadani elementi trokuta kako bi trokut bio rješiv. Ti uvjeti se nazivaju *determinacija.*

Tipovi zadataka i uobičajene oznake:

SSS - *Zadane sve tri stranice*
SAS - *Zadane dvije stranice i kut među njima*
SSA - *Zadane dvije stranice i kut nasuprot jednoj od njih*

AAA - *Zadana sva tri kuta*
ASA - *Zadana jedna stranica i dva kuta na njoj*
AAS - *Zadana dva kuta i stranica nasuprot jednom od njih*

Rješavanje tipskih zadataka

SSS: Zadane su stranice *a, b* i *c*.
$\alpha, \beta, \gamma = ?$

Izračunamo $s,\ s-a,\ s-b,\ s-c$, pa pomoću formula za polovine kutova
$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{k}{sin(s-a)},\quad tg\frac{\beta}{2} = \frac{k}{sin(s-b)},\quad tg\frac{\gamma}{2} = \frac{k}{sin(s-c)}$, gdje je
$k = \sqrt{\frac{sin(s-a)\,sin(s-b)\,sin(s-c)}{sin\,s}}$, izračunamo tražene kutove α, β, γ.

Determinacija: Da bi sferni trokut bio određen (determiniran) moraju veličine zadanih elemenata biti takve da ispunjavaju uvjete:
$0 < a+b+c < 2\pi$ i $b-c < a < b+c,\ \ c-a < b < c+a,\ \ a-b < c < a+b$. □

AAA: Zadani su kutovi α, β, γ.
$a, b, c = ?$

Ovaj zadatak polarno odgovara prethodnom. Možemo ga riješiti tako da umjesto zadanog trokuta rješavamo njegov polarni trokut kojemu su poznate sve tri stranice:
$a' = \pi - \alpha,\ \ b' = \pi - \beta,\ \ c' = \pi - \gamma$.
Odavde, prema formulama iz prethodnog zadatka slijede vrijednosti za kutove
$\alpha' = \pi - a,\ \ \beta' = \pi - b,\ \ \gamma' = \pi - c$, a time i stranice *a, b, c*.

Determinacija: Zadani elementi moraju zadovoljavati uvjete:

$$\pi < \alpha+\beta+\gamma < 3\pi \quad \text{i} \quad \begin{cases} \beta-\gamma < \pi-\alpha < \beta+\gamma \\ \gamma-\alpha < \pi-\beta < \gamma+\alpha \\ \alpha-\beta < \pi-\gamma < \alpha+\beta \end{cases} . \square$$

SAS: Zadane su dvije stranice i kut među njima, npr. *b, c, α*.
$\beta, \gamma, a = ?$

Pomoću Napierovih formula $tg\frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{cos\frac{b-c}{2}}{cos\frac{b+c}{2}} \cdot ctg\frac{\alpha}{2}$ i $tg\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{sin\frac{b-c}{2}}{sin\frac{b+c}{2}} \cdot ctg\frac{\alpha}{2}$,
izračunat ćemo kutove β, γ: $\beta = \frac{\beta+\gamma}{2} + \frac{\beta-\gamma}{2},\quad \gamma = \frac{\beta+\gamma}{2} - \frac{\beta-\gamma}{2}$.

Stranicu *a* izračunat ćemo npr. iz sinusovog poučka: $sin\,a = \frac{sin\,b\,sin\,\alpha}{sin\,\beta}$.

Determinacija: Nema posebnih ograničenja na zadane elemente osim što svaki od njih mora biti veći od 0 i manji od π. □

ASA: Zadatak polarno odgovara prethodnom. □

SSA: Zadane su dvije stranice i kut koji je nasuprot jednoj od tih stranica, npr. *a, b,* α.
$\beta,\ \gamma,\ c = ?$

Pomoću poučka o sinusima, formulom $\sin\beta = \dfrac{\sin b \sin\alpha}{\sin a}$, izračunat ćemo dvije suplementarne vrijednosti za kut β, ili nijednu. Mogućnosti su dakle sljedeće:

a) $\underline{\sin b \sin\alpha = \sin a} \;\;\Rightarrow\;\; \sin\beta = 1,\;\; \beta = 90°$, a to znači da je zadanim elementima određen pravokutni sferni trokut kojemu je stranica *b* hipotenuza.

b) $\underline{\sin b \sin\alpha > \sin a} \;\;\Rightarrow\;\; \sin\beta > 1 \;\;\Rightarrow$ zadatak nema rješenja.

c) $\underline{\sin b \sin\alpha > \sin a} \;\;\Rightarrow\;\; \sin\beta > 1 \;\;\Rightarrow$ dvije suplementarne vrijednosti za kut β. Pomoću Napierovih jednadžbi izračunat ćemo zatim stranicu *c* i kut γ.

Determinacija: Nema posebnih ograničenja na zadane elemente. □

AAS: Zadatak polarno odgovara prethodnom. □

Različiti zadaci:

1. Na sferi polumjera *R* = 6370 *km* odrediti koliki je luk ako je pripadni središnji kut $l° = 1°,\ 1'\ \text{ ili }\ 1''$.

   Luk računamo prema formuli: $l = R\, l° \cdot \dfrac{\pi}{180°}$.

   $$l° = 1° \;\;\Rightarrow\;\; l = 6370\; 1° \cdot \frac{\pi}{180°} = 111{,}12111\; km,$$

   $$l° = 1' \;\;\Rightarrow\;\; l = 6370 \cdot 1' \cdot \frac{\pi}{180°} = 6370 \cdot \left(\frac{1}{60}\right)^{\circ} \cdot \frac{\pi}{180°} = 1{,}85202\; km,$$

   $$l° = 1'' \;\;\Rightarrow\;\; l = 6370 \cdot 1'' \cdot \frac{\pi}{180°} = 6370 \cdot \left(\frac{1}{3600}\right)^{\circ} \cdot \frac{\pi}{180°} = 0{,}03087\; km = 30{,}87\; m.$$

2. Na sferi polumjera *R* = 6370 *km* odrediti koliki je središnji kut ako je pripadni luk $l = 50 km$.

   Središnji kut računamo prema formuli: $l = R\, l° \cdot \dfrac{\pi}{180°}$, tj. $l° = \dfrac{180° \cdot l}{R\pi}$.

   $$l = 50 km \;\;\Rightarrow\;\; l° = \frac{180° \cdot 50}{6370\pi} = 0{,}44996° = 0°\ 27'\ 00''.$$

3. Na kugli polumjera $R = 6370$ *km* nalazi se trokut površine $P = 1$ *km*^{2}. Odrediti sferni eksces tog trokuta.

Sferni eksces: $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$.
Iz formule za površinu P sfernog trokuta:

$P = \varepsilon R^2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \dfrac{P}{R^2}$ u radijanima,

$P = \varepsilon R^2 \cdot \dfrac{\pi}{180°} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon° = \dfrac{180°\, P}{R^2\, \pi}$ u stupnjevima, ili

$\varepsilon'' = \dfrac{180°\, P}{R^2\, \pi} \cdot 3600 = 0{,}00508''$ u sekundama, što je ponekad bolje ako je eksces jako mali.

4. Odrediti sferni eksces i površinu jednakostraničnog sfernog trokuta kojemu je dužina stranice 90*km*, ako je radijus sfere $R = 6371km$.

$a = b = c = 90km$

$P = \varepsilon R^2 \cdot \dfrac{\pi}{180°} = ?$

$\varepsilon = ?$

Sferni eksces ćemo izračunati pomoću L'Huilierove formule

$$tg\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{tg\frac{s}{2}\, tg\frac{s-a}{2}\, tg\frac{s-b}{2}\, tg\frac{s-c}{2}} \;.$$

$2s = a + b + c = 3a \quad \Rightarrow \quad s = \dfrac{3a}{2}$

$$a° = \frac{90}{R} \cdot \frac{180°}{\pi} = 0{,}809389445° \;\Rightarrow\; s = 1{,}214084168° \;\Rightarrow\; \frac{s}{2} = 0{,}60704284°$$

$$\Rightarrow \frac{s-a}{2} = \frac{s-b}{2} = \frac{s-c}{2} = 0{,}202347361°$$

$$tg\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{4{,}667051^{-10}} = 0{,}00002160335$$

$$\frac{\varepsilon}{4} = 0{,}001237781° \quad \Rightarrow \quad \underline{\varepsilon = 0{,}004951125° = 0°\ 00'\ 17{,}8240508''}$$

Sada možemo izračunati površinu:

$$P = \varepsilon°\, R^2 \cdot \frac{\pi}{180°} = \cdots\cdots = \underline{3507{,}490379km^2}\;.$$

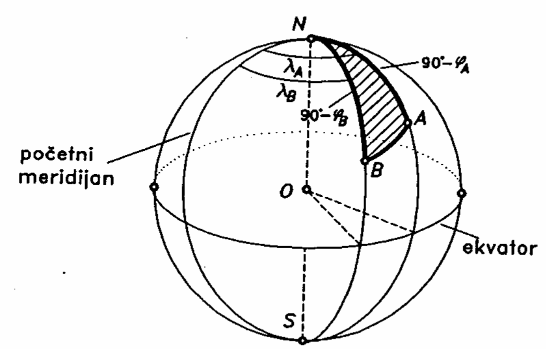
Interesantno je izračunati razliku do površine ravnog (ravninskog) jednakostraničnog trokuta iste duljine stranice:

$$P_{RT} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3507{,}402886km^2$$

$P - P_{RT} = 0{,}087493km^2 \quad \Rightarrow$ kvadrat stranice 0,295792157 *km*, tj. 295,792157 *m*.

5. Primjenom kosinusovog poučka za stranice izračunati udaljenost od Zagreba do New Yorka, ako su nam poznate geografska dužina χ i širina φ tih dvaju gradova.

Zagreb – točka $A(\varphi_A, \chi_A)$
New York – točka $B(\varphi_B, \chi_B)$
pol ekvatorske kružnice – točka N
udaljenost d – mjeri se po glavnoj kružnici



Iz sfernog trokuta $\triangle ABN$ čitamo potrebne podatke:

$$cos\, d = cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_A\right)cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_B\right)+sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_A\right)sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_B\right)cos(\chi_B-\chi_A)$$

$$cos\, d = sin\,\varphi_A\, sin\,\varphi_B + cos\,\varphi_A\, cos\,\varphi_B\, cos(\chi_B-\chi_A)$$

$$\Rightarrow\; d = cos^{-1}(sin\,\varphi_A\, sin\,\varphi_B + cos\,\varphi_A\, cos\,\varphi_B\, cos(\chi_B-\chi_A))$$

$$\left.\begin{array}{l} ZG\,(\varphi_A = 45°\,48'\,54'',\; \chi_A = 15°\,58'\,59'') \\ NY\,(\varphi_B = 40°\,42'\,44'',\; \chi_B = -74°\,0'\,24'') \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; d = 6904{,}86\ km$$

6. Neka su zadane dvije stranice sfernog trokuta $\triangle\, ABC$ i kut koji je nasuprot jednoj od tih stranica. Razriješiti trokut i izračunati sferni eksces.
Zadatak spada u tip *SSA* zadataka.

$a = 53{,}533748$
$b = 116{,}590089$
$\alpha = 28{,}57111 = 28°\ 57'\ 11''$
$\beta, \gamma, c = ?$

Pomoću poučka o sinusima izračunamo
$\beta_1 = 32{,}272847 \;\Rightarrow\; \beta_1 = 32°\,16'\,22{,}25''$, i njegov suplement
$\beta_2 = 180° - \beta_1 = 180° - 32°\,16'\,22{,}25'' = 147°\,43'\,37{,}7'' = 147{,}727139$.

Iz Napierovih jednadžbi slijedi
$c_1 = 169{,}412204° = 169°\,24'\,43{,}9''$ i $c_2 = 70{,}977531° = 70°\,58'\,39{,}11''$,
odnosno
$\gamma_1 = 173{,}67923° = 173°\,40'\,45{,}2''$ i $\gamma_2 = 34{,}503681° = 34°\,30'\,13{,}25''$.

Sferni eksces: $\varepsilon_1 = \alpha + \beta_1 + \gamma_1 - 180° = 54{,}905160° = 54°\,54'\,18{,}58''$, i
$\varepsilon_2 = \alpha + \beta_2 + \gamma_2 - 180° = 31{,}183903° = 31°\,11'\,02{,}05''$.