



INŽENJERSKA GEODEZIJA I

PREDAVANJA

prof. dr. sc. Gorana Novaković

<http://www.geof.hr/~ngorana>

gorana.novakovic@geof.hr



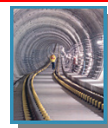
INŽENJERSKA GEODEZIJA

Inženjerska geodezija je područje geodezije koje se odnosi na primjenu geodetskih mjernih sustava u projektiranju i izgradnji objekata, te u praćenju njihovih pomaka i deformacija tijekom izgradnje i eksploatacije. Osim izgrađenih objekata prate se pomaci prirodnih objekata - tektonski aktivna područja.

Jedan od osnovnih zadataka inženjerske geodezije je prenošenje projekta objekta sa plana na teren. To prenošenje naziva se **ISKOLČENJE**.



Primjena geodezije u inženjerskim radovima



IZGRAĐENI OBJEKTI

- radovi vezani uz **niskogradnju** - željezničke pruge, ceste, autoceste, mostovi, tuneli, zračne i plovne luke.
- radovi vezani uz **visokogradnju** - velike zgrade, industrijska postrojenja, stadioni.
- radovi vezani uz **energetiku** - brane, dalekovodi, plinovodi, naftovodi, rafinerije.
- izrada projekata **regulacije postojećih naselja** i pri **izgradnji novih naselja**.



PRIRODNI OBLICI ZEMLJINE POVRŠINE

Rasjedi, klizišta, odroni, vulkani; općenito sva tektonski aktivna područja.

Primjena inženjerske geodezije: praćenje gibanja Zemljine kore, klizanja ili slijeganja tla i sl.

Potreba praćenja i utvrđivanja nastalih pomaka ili deformacija tla ili građevine, neophodni su radi poduzimanja mjera sigurnosti ili sanacije tih objekata.

PROJEKTIRANJE I PROJEKT

Ukupan rad oko kompletiranja sve potrebne dokumentacije za gradnju nekog objekta naziva se **projektiranje**, a sva potrebna dokumentacija čini jednu cjelinu koja se naziva **projekt** tog objekta.

Svaki građevinski objekt, od zamisli do puštanja u eksploataciju, prolazi kroz nekoliko faza u kojima su prisutni i odgovarajući radovi.

Prema namjeni i razini razrade, projekti se razvrstavaju na (Zakon o gradnji – NN 175/03):

- **idejni projekt**
- **glavni projekt**
- **izvedbeni projekt.**

5

Idejni projekt

Idejni projekt je skup međusobno usklađenih nacrti i dokumenata kojima se daju osnovna oblikovno funkcionalna i tehnička rješenja građevine te prikaz smještaja građevine u prostoru. Idejni projekt, ovisno o složenosti i tehničkoj strukturi građevine, može sadržavati i druge nacрте i dokumente ako su oni značajni za izradu glavnog projekta (opis tehnološkog postupka i tehnološke sheme, opis primjena određene tehnologije građenja, procjenu troškova radi provedbe postupaka javne nabave i sl.).

6

Glavni projekt

Glavni projekt je skup međusobno usklađenih projekata kojima se daje tehničko rješenje građevine, prikaz smještaja građevine u prostoru i dokazuje ispunjavanje bitnih zahtjeva za građevinu, kao i drugih zahtjeva i tehničkih specifikacija. Glavni projekt sadrži građevinski projekt i **geodetski projekt**, a ovisno o namjeni i tehničkoj strukturi građevine sadrži i arhitektonski projekt, elektrotehnički projekt i strojarski projekt. Projekti moraju uvijek sadržavati i podatke iz elaborata koji su poslužili kao podloga za njihovu izradu, te projektirani vijek uporabe građevine i uvjete za njeno održavanje.

7

Izvedbeni projekt

Izvedbenim projektom razrađuje se tehničko rješenje dano glavnim projektom. Izvedbeni projekt mora biti izrađen u skladu s glavnim projektom.

Razlikuju se:

- građevinski projekt,
- **geodetski projekt** (grafički i numerički dio) - realizira građevinski projekt.

8

Geodetski radovi pri projektiranju, građenju i korištenju građevinskog objekta

- prikupljanje postojećih i po potrebi izrada novih geodetskih podloga,
- postavljanje normi za točnost građenja i prema tome točnost iskolčenja (horizontalnog i vertikalnog),
- postavljanje odgovarajuće geodetske osnove sa koje će se iskolčavati sa zadanom točnošću,
- izbor metode iskolčenja (s obzirom na točnost),
- izbor instrumentarija i pribora,
- analiza točnosti izvršenog iskolčenja,
- izmjera izvedenog stanja,
- opažanje vertikalnih i horizontalnih pomaka - zaključci o stabilnosti i sigurnosti objekta.

9

GEODETSKE PODLOGE ZA PROJEKTIRANJE

Geodetske podloge za projektiranje su **planovi** i **karte** (analogni i digitalni) različitih mjerila.

Mjerilo geodetske podloge ovisi o karakteristikama objekta i za koju fazu projektiranja se koristi.

Geodetski projekt se sastoji od:

1. **Predhodnih ispitivanja** – elaborat predradnji za projektiranje.
2. **Idejnog projekta**
3. **Glavnog projekta** → izvedbeni ili detaljni projekt.

10

1. Elaborat predradnji za projektiranje

U ovom dijelu elaborata analizira se ekonomska opravdanost izgradnje objekta, različite varijante izgradnje – odabiranje najpovoljnijeg rješenja i sl.

Rad počinje na geodetskim i geološkim kartama, foto snimcima – ispituju se različite lokacije budućeg objekta. Nakon obilaska terena odabire se najpovoljnija lokacija.

Pretprojekt – ucrtava se na kartama opći raspored objekta. To je osnova za idejni projekt.

11

2. Podloge za idejni projekt

Karte i planovi mjerila: **1:5000 (1:10000), 1:2500, 1:2000, 1:1000** (ovisi o vrsti i veličini objekta).

Sadrži rješenja svih tehničkih elemenata objekta, položaj gradilišta u cjelini i pojedinih dijelova, konstrukcije pojedinih objekata, obim radova i sl. Služi kao osnova za **iskolčenje** planiranog objekta na teren.

Na idejnom projektu se **projektira i geodetska osnova** za iskolčenje objekta.

12

3. Podloge za glavni projekt - detaljni ili izvedbeni

Planovi mjerila: **1:1000, 1:500, 1:200, (1:100).**

Glavni projekt predstavlja razradu idejnog projekta – radni crteži za pojedine dijelove idejnog projekta sa detaljnim rješenjima svih dijelova objekta na osnovu kojih će se izvoditi građenje.

13

Planovi i karte

- ❖ **Plan** je vjerna slika manjeg dijela površine Zemlje; svi objekti na planu su zadržali isti međusobni odnos i oblik kao što ga imaju u prirodi samo u manjem mjerilu. Mjerilo planova: **1:500, 1:1000, 1:2000, 1:2500, 1:5000.**
- ❖ Na karti je predstavljen veći dio površine pa zakrivljenost Zemlje dolazi do izražaja. **Karta** je smanjeni, deformirani i generalizirani prikaz Zemljine površine na ravnini, definiranoj određenim matematičkim uvjetima. Mjerilo karata: **1:5000, 1:10000, 1:25000, 1:50000, 1:100000** i sitnije.

14

Točnost geodetskih planova i karata

Pored posebnih uvjeta koji ovise o namjeni, od plana ili karte se zahtjeva da je: točna, potpuna, pregledna i jasna.

Točnost geodetskih podloga (analognih) ovisi o:

1. mjerilu
2. metodi snimanja i kartiranja
3. kvaliteti materijala.

Pri projektiranju je važno znati koju točnost u horizontalnom i visinskom pogledu mogu dati karte i planovi, naročito ako se koristi i za iskolčenje objekta na teren.

15

1. Točnost (grafička) planova u horizontalnom smislu

$$\mu_{hor} = 0,2\text{mm} \cdot m_k$$

m_k – nazivnik mjerila plana
0,2 mm – granična grafička točnost (to je veličina koja se može prostim okom, mjerilom, očitati ili nanijeti na kartu).

2. Točnost planova u vertikalnom smislu

Visinska predodžba terena se može iskazati pomoću:

- **kota** (točke geodetske osnove, detaljne točke)
- **izohipsa** (reljef ili konfiguracija terena).

Točnost određivanja kota ovisi o točnosti metode izmjere.

16

Točnost visinskog prikaza terena pomoću izohipsa ovisi o:

- ❖ točnosti visinske izmjere,
- ❖ gustoće i rasporedu snimljenih točaka,
- ❖ točnosti kartiranja, metode interpolacije,
- ❖ mjerilu plana i ekvidistanci izohipsi.

Visinska točnost plana:

$$\mu_{ver} = K + k \cdot tg \alpha$$

K - točnost cjelokupne visinske izmjere

k - pogreška horizontalnog položaja točke

α - kut nagiba terena.

17

GEODETSKA OSNOVA ZA PROJEKTIRANJE I ISKOLČENJE

- 1. Geodetska osnova za izmjeru terena** - ako za projekt ne postoje geodetske podloge ili postojeće nisu kvalitetne, potrebno je provesti izmjeru terena: postavljaju se poligonski ili tahimetrijski vlakovi (točnost izmjere propisana Pravilnikom). Kako točnost i raspored točaka takve osnove ne zadovoljava točnost i raspored točaka za iskolčenje, projektira se nova:
- 2. Geodetska osnova za iskolčenje** – samostalna osnova čija je točnost propisana projektom, raspored i gustoća točaka ovisi o obliku i veličini novog objekta.

Geodetska osnova za iskolčenje izvodi se kao:

- mreža točaka
- mreža linija.

18

Opće karakteristike mreža za iskolčenje

- Mreža se projektira na idejnom projektu objekta gdje su već projektirani svi pomoćni objekti koji će služiti u toku građenja.
- Projekt mreže treba obuhvatiti cijelo gradilište i udovoljiti svim njegovim potrebama do kraja građenja.
- Položajna točnost točaka mreže treba biti oko 2 puta veća od položajne točnosti točaka koje definiraju glavne osi objekta.
- Radi lakšeg računanja koordinata točaka koje definiraju osi objekta, treba uklopiti pojedine osi u samu mrežu ili stranice mreže postaviti paralelno budućem objektu.

19

Ostale karakteristike mreže

- **Lokalne (samostalne)** mreže – za objekte smještene na manjem području ili gdje se traži visoka točnost iskolčenja i praćenja pomaka (mostovi, brane, tuneli).
- **Priključene na osnovnu mrežu** - za objekte smještene na većem području gdje je potrebno međusobno povezivanje niza objekata (hidroenergetski sustavi, regulacije vodotoka, regulacija gradova, komunikacije).
- **Po veličini** - prilagođene veličini objekta.
- **Po obliku** - ovisi o karakteru i razvedenosti objekta, mogućnosti stabilizacije točaka, vrsti predviđenih mjerenja i standardima projektiranja.
- **Točnost** - mreža je homogena (sve su točke istog reda).
- Mreža se **izjednačava** kao cjelina.

20

Geometrijska definicija geodetske mreže

Geodetsko pozicioniranje je određivanje položaja, tj. koordinata jedne, dvije ili više točaka na, iznad ili ispod zemljine površine, u odnosu na prethodno definirani koordinatni sustav.

Geodetsko pozicioniranje se dijeli na:

- pozicioniranje jedne točke,
- relativno pozicioniranje – relativni položaj jedne točke u odnosu na drugu,
- **pozicioniranje mreže** – relativni položaj između tri ili više točaka.

Geodetska mreža se definira kao **geometrijska** konfiguracija tri ili više točaka koje su povezane geodetskim mjerenjima.

21

Algebarska definicija geodetske mreže

Osnovni pojmovi i definicije

Potrebno je odrediti brojne vrijednosti nekih veličina: X_1, X_2, \dots, X_u - **tražene** veličine (nepoznanice).

Mogu postojati neke ranije određene veličine - **dane** ili **poznate** veličine.

L_1, L_2, \dots, L_n - **mjerene** veličine.
(za izjednačenje mora biti $n > u$; broj nezavisno mjerenih veličina veći od broja traženih veličina).

Broj mjerenih veličina u je broj **neophodnih** veličina.

Ostale mjerene veličine L_{u+1}, \dots, L_n , njih $f = n - u$ su **prekobrojne** veličine = broj stupnjeva slobode.

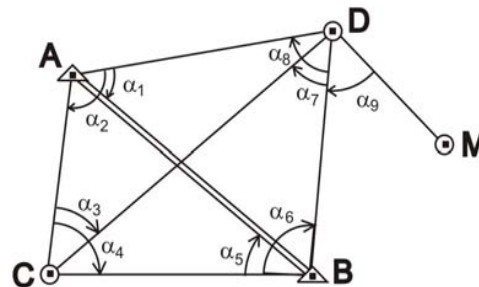
22

Definicija geodetske mreže

Skup geodetskih točaka sa skupom L_1, L_2, \dots, L_n mjerenih veličina (koje mogu biti i raznovrsne - kutovi, duljine) naziva se geodetskom mrežom, ako se između tih n mjerenih veličina može naći u ($u < n$) nezavisnih veličina takvih da se bilo koji element (čija vrsta pripada vrsti mjerenih veličina) može izraziti pomoću tih u neophodnih veličina.

Primjer:

Na osnovu poznatih koord. točaka A i B (dane veličine) treba odrediti koordinate točaka C i D (tražene veličine). Izmjereni su horizontalni kutovi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8$ (mjerene veličine).



23

Vrste i metode izmjere geodetskih mreža

VRSTE GEODETSKIH MREŽA (dimenzije)

Visinske 1D

Horizontalne 2D

Prostorne 3D

METODE IZMJERE GEODETSKIH MREŽA

TERESTRIČKE

Triangulacija

Trilateracija

Kombinacija

Poligonometrija

Lučni presjek

Nivelman

SATELITSKE

GNSS

GPS, GLONASS, Galileo

24

USPOSTAVA GEODETSKE MREŽE

- 1. Projekt mreže** – određuje se konfiguracija mreže (oblik mreže i broj točaka u mreži) i plan mjerenja (koje veličine mjeriti i s kojom točnošću - ocjena točnosti *a priori*).
- 2. Izvedba mreže** – realizacija mreže na terenu: rekognosciranje, stabilizacija, izmjera.
- 3. Analiza mreže**
 1. analiza točnosti *a priori*
 2. analiza točnosti *a posteriori* - nakon mjerenja i nakon izjednačenja.

25

PROJEKT MREŽE

Projektiranje mreže vezano je uz vrstu i osobine objekta. Oblik, dimenzije, broj točaka i položaj mreže, treba se prilagoditi objektu i okolnom terenu. Ova faza provodi se prije izlaska na teren (mjerenja).

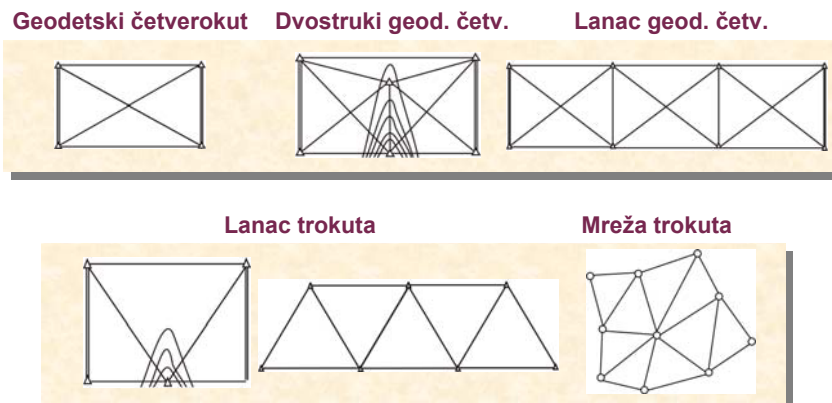
Projekt mreže uključuje:

- oblik (konfiguraciju) mreže i plan mjerenja,
- *a priori* ocjenu točnosti mjerenja,
- izbor: metode mjerenja, instrumentarija, broja ponavljanja mjerenja, metode izjednačenja mreže i dr.

26

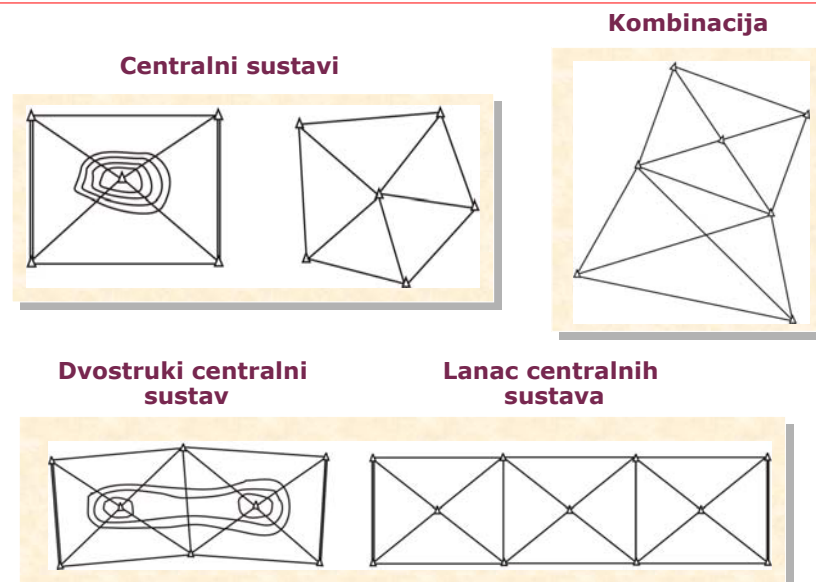
Horizontalne mreže

Osnovni oblici horizontalnih mreža (2D)



27

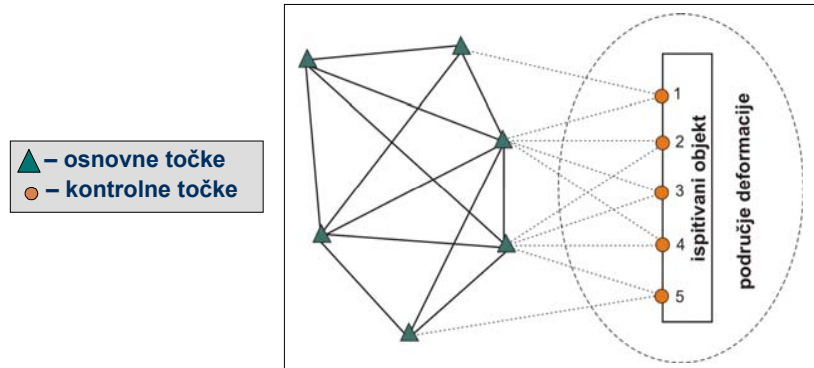
nastavak



28

Vrste geodetskih mreža za određivanje pomaka i deformacija

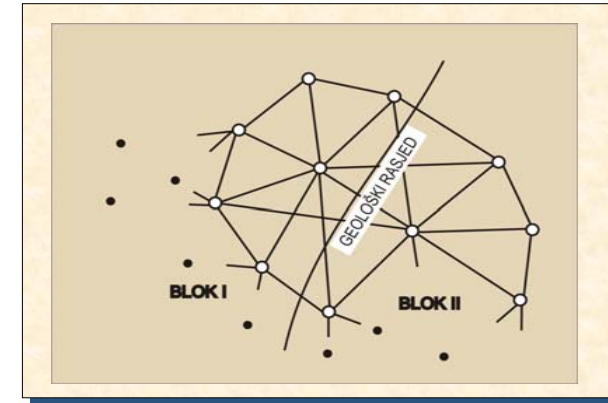
- Apsolutne mreže** – sastoje se od dvije grupe točaka:
- **osnovne točke** (referentna mreža) sa kojih se opažaju
 - **kontrolne točke** – smještene na objektu.



29

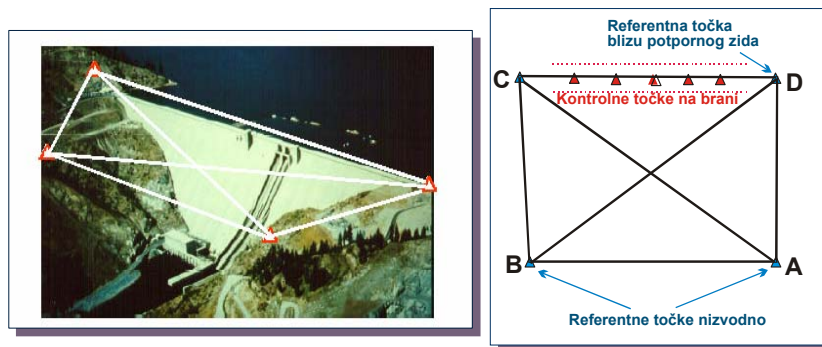
nastavak

- Relativne mreže** – sve točke nalaze se na objektu (opažaju se relativni pomaci između točaka)



30

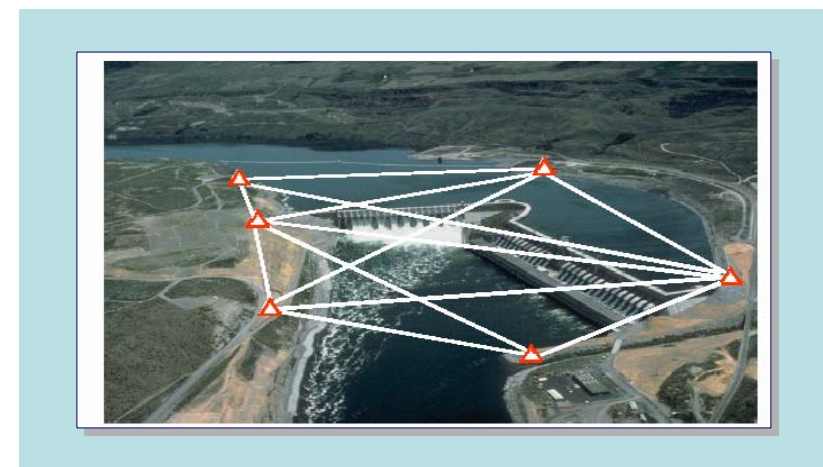
Smještaj (lokacija) točaka geodetske mreže



Konfiguracija apsolutne mreže za izgradnju i praćenje betonske brane (osnovne i kontrolne točke)

31

Idealno projektirana geodetska mreža za izgradnju i praćenje pomaka brane



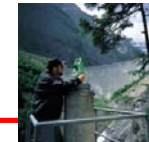
32

IZVEDBA MREŽE

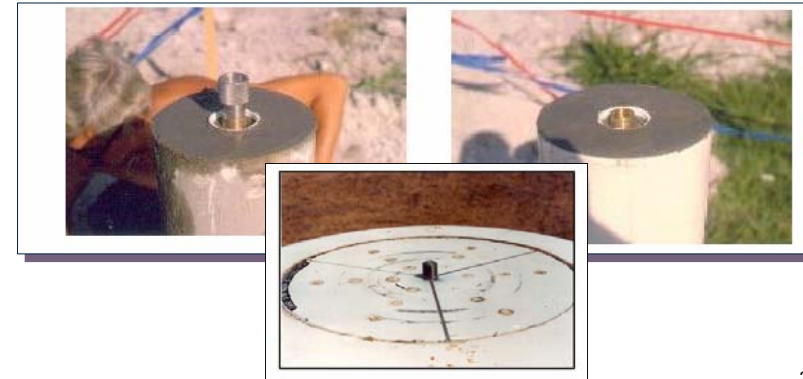
- rekognosciranje,
- stabilizacija i signalizacija,
- izmjera.

Rekognosciranje je odabiranje najpovoljnijeg položaja točaka na terenu, a da pri tom budu zadovoljeni određeni uvjeti. Treba izbjegavati: klizišta, sredine parcela, obale rijeka ili potoka, rub puta, blizinu predmeta (zgrade, ograde, zidovi) ili terena (radi refrakcije). Osim toga treba izbjegavati blizinu željezničkih pruga, električnih i drugih vodova (koji ometaju elektrooptičke valove daljinomjera ili GPS signale).

Stabilizacija

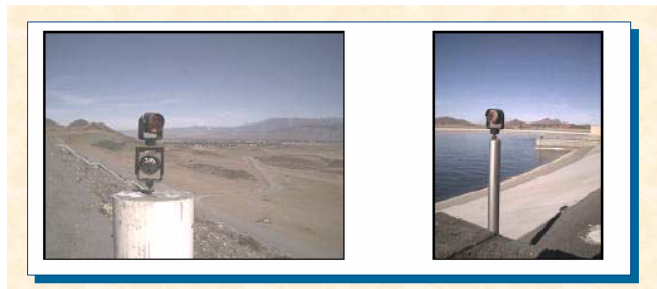


Točke se stabiliziraju okruglim betonskim stupovima u čijem se centru postavlja uređaj za prisilno centriranje. Visina stupa oko 1,5 m.



Signalizacija

Signalizacija treba odgovarati principu prisilnog centriranja. Signalne značke - osnovna karakteristika da se mogu postaviti na istu podložnu ploču na koju se postavlja instrument.



Vizurne marke – prisilno centriranje

Metode izmjere horizontalnih mreža

- **Triangulacija** – mjere se pravci, tj. kutovi.
- **Trilateracija** – mjere se duljine.
- **Triangotilateracija** – mjere se kutovi i duljine.
- **Poligonometrija** – mjere se kutovi i duljine.
- **Presjek lukova** – mjere se duljine.

ANALIZA KVALITETE GEODETSKIH MJERENJA

Osnovni pojmovi i definicije

Točnost predstavlja stupanj podudaranja ili bliskosti ispravljenog rezultata mjerenja i istinite, odnosno dogovorene istinite vrijednosti mjerene veličine.

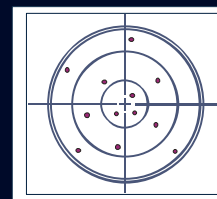
Točnost je kvalitativna mjera i ne iskazuje se brojem.

Preciznost predstavlja stupanj međusobne bliskosti ponovljenih mjerenja iste veličine u propisanim uvjetima.

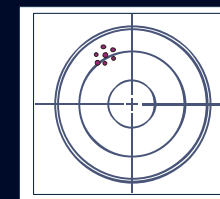
Preciznost je kvantitativna mjera i iskazuje se brojem.

37

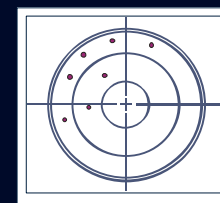
TOČNOST I PRECIZNOST



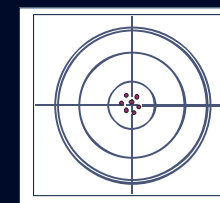
Točno, ali nije precizno



Precizno, ali nije točno



Ni točno ni precizno



Točno i precizno

38

Numeričke metode opisa podataka mjerenja

Prava vrijednost \leftrightarrow pogreška (ε)

Najbolja procjena \leftrightarrow odstupanje (v)

Stupnjevi slobode = broj prekobrojnih mjerenja (f)

- Varijanca skupa (oznaka σ^2). Standardno odstupanje skupa (oznaka σ).
- Varijanca uzorka (oznaka s^2). **Standardno odstupanje uzorka (oznaka s).**
- Standardno odstupanje sredine uzorka (oznaka s_x).

Mjerna nesigurnost – brojčani iskaz o kvaliteti rezultata mjerenja uz primjenu osnovnog parametra - *standardnog odstupanja* (s).

39

KRITERIJI KVALITETE GEODETSKE IZMJERE

TOČNOST GEODETSKE IZMJERE

PRECIZNOST

+

POUZDANOST

Slučajna odstupanja – međusobna odstupanja ponovljenih mjerenja iste veličine. Reduciraju se pažljivim mjerenjem, korištenjem preciznog instrumenta, mjerenjem pri povoljnim uvjetima i dr.

Grube pogreške – otkrivaju se kontrolnim, prekobrojnim mjerenjima. **Sustavna odstupanja** – reduciraju se kalibracijom mjerne opreme, različitim postupcima pri mjerenju (obostrano mjerenje, niveliranje iz sredine i dr.).

40

TRIANGULACIJSKE MREŽE

- Triangulacijska mreža je mreža međusobno povezanih trokuta. Mjere se kutovi (pravci) u pojedinim trokutima.
- Mikrotriangulacijske mreže - duljine stranica 300 - 500 m.

Osnovna koncepcija određivanja koordinata triangulacijskih točaka

Za određivanje oblika i mjerila triangulacijske mreže potrebno je poznavati sve kutove u mreži i duljinu jedne (bilo koje) strane. Na temelju tih elemenata računaju se (po sinusovom poučku) sve ostale stranice u mreži. Na temelju izmjerenih kutova i izračunatih duljina računaju se približne koordinate točaka. Definitivne koordinate dobiju se nakon izjednačenja.

41

Točnost triangulacijske mreže

Položajna točnost objekta ovisi o:

- točnosti (metodi) iskolčenja
- točnosti mreže sa koje se iskolčava.

Točnost mreže, odnosno točnost određivanja položaja triangulacijskih točaka ovisi o:

1. geometrijskom obliku mreže
2. točnosti mjerenih veličina (horizontalni kutovi, početna strana)
3. pogreškama danih veličina (na to se ne može utjecati).

42

1. Geometrijski oblik mreže

U praksi, oblik mreže ovisi o vrsti i veličini objekta i konfiguraciji terena.

Treba nastojati da su osnovne figure (trokuti) što pravilniji i da ih je što manje. Optimalan oblik trokuta je istostraničan.

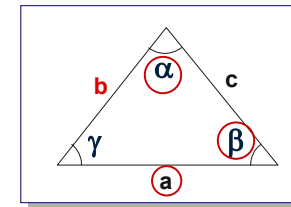
Povećanje broja trokuta u mreži i veće odstupanje od pravilnog oblika trokuta utjecat će na smanjenje linearne preciznosti u mreži polazeći od mjerene strane.

43

Preciznost izračunate strane u trokutu

U trokutu je mjereno: a, α, β

Traži se: stranica b i preciznost izračunate strane s_b



$$b = a \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

Relativno standardno odstupanje izračunate strane b , ako su kutovi mjereni istom preciznošću, tj. $s_\alpha = s_\beta = s_0$:

$$\frac{s_b^2}{b^2} = \frac{s_a^2}{a^2} + \frac{s_0^2}{\rho^2} (ctg^2 \alpha + ctg^2 \beta)$$

44

Ocjena preciznosti bilo koje strane u mreži (relativno):

$$\frac{s_b^2}{b^2} = \left(\frac{s_a}{a}\right)^2 + \frac{2}{3} \frac{s_0^2}{\rho^2} \sum_{i=1}^n (ctg^2 \alpha_i + ctg \alpha_i ctg \beta_i + ctg^2 \beta_i)$$

Dakle, linearna preciznost neke izračunate strane ovisi o:

- obliku mreže (veličini kutova),
- broju osnovnih figura u mreži (n),
- nesigurnosti mjerenja kutova (s_0),
- nesigurnosti mjerenja početne strane u mreži (s_a).

Ako je $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ \Rightarrow \frac{s_b^2}{b^2} = \left(\frac{s_a}{a}\right)^2 + \frac{2}{3} \frac{s_0^2}{\rho^2}$

45

2. Nesigurnost pri mjerenju kutova

Na nesigurnost mjenog kuta utječu:

- pogreške instrumenta i nesigurnost ispitivanja (kalibracije) instrumenta,
- nesigurnost pri mjerenju (npr. loše centriranje instrumenta i signala),
- nesigurnost mjerenja (npr. slučajne i sustavne pogreške viziranja i pogreška očitavanja),
- vanjski uvjeti (refrakcija, titranje zraka),
- osobna pogreška opažača (fiziološke osobine oka).

Na temelju svih pojedinih nesigurnosti (standardnih odstupanja) može se **a priori** procijeniti ukupna nesigurnost izmjenog kuta - računa se po zakonu o prirastu varijanci (zbroj pojedinih varijanci).

46

Varijanca srednje vrijednosti **horizontalnog kuta β** , izračunata pomoću horizontalnih pravaca izmjerenih u n ponavljanja:

$$\sigma_\beta^2 = \frac{\sigma_v^2 + \sigma_{oc.}^2}{n} + 2\sigma_{hor.}^2 ctg^2 z + (\rho'')^2 \frac{4\sigma_c^2}{s^2} \left(1 - \frac{\cos \beta}{2}\right) + 2 \left(\frac{s}{2R}\right)^2 \sigma_{kh}^2$$

- σ_v nesigurnost viziranja,
- $\sigma_{oc.}$ nesigurnost očitavanja,
- σ_c nesigurnost centriranja instrumenta i vizurne marke,
- $\sigma_{hor.}$ nesigurnost horizontiranja instrumenta,
- σ_{kh} nesigurnost određivanja koeficijenta bočne refrakcije,
- s duljina vizurne linije,
- z zenitna udaljenost vizurne linije,
- k_h koeficijent bočne refrakcije,
- R srednji radijus Zemlje.

47



Izmjera triangulacijske mreže

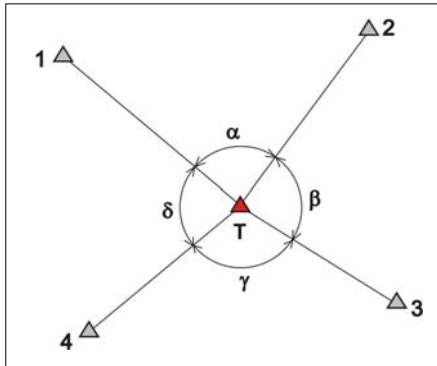
- ❖ **Girusna metoda** – mjere se pravci.
- ❖ **Metoda zatvaranja horizonta** – mjere se kutovi.

Girusna metoda – instrumenti s optičkim mikrometrom (0,1" – 0,2"), mjerne stanice.



48

Metoda zatvaranja horizonta



Uvjet:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$

Odstupanje (nezatvaranje horizonta):

$$f_H = (\alpha + \beta + \gamma + \delta) - 360^\circ$$

49

Ocjena točnosti mjerenih kutova

(prije izjednačenja mreže)

1. Iz odstupanja od aritmetičke sredine

Girusna metoda: n girusa, s pravaca

Standardno odstupanje jedinične težine, tj. pravca mjenenog u jednom girusu:

$$s_0 = \sqrt{\frac{\sum [d^2] - \frac{(\sum [d])^2}{s}}{(s-1)(n-1)}}$$

d – razlika pojedinih pravaca u girusu od aritmetičke sredine
 $[d]$ – suma svih razlika d jednog te istog pravca iz svih girusa
 $[d^2]$ – zbroj kvadrata razlika d u pojedinim girusima
 $\sum [d^2]$ – suma zbroja kvadrata razlika
 $\sum [d]$ – zbroj suma svih kvadrata na kvadrat

Standardno odstupanje pravca kao aritmetičke sredine iz svih girusa:

$$S_p = \frac{s_0}{\sqrt{n}}$$

50

2. Iz odstupanja zatvaranja horizonta f_H

- kut mjenen u n girusa:

$$S_k = \frac{f_H}{\sqrt{s}}$$

s – broj kutova
 f_H – kutna odstupanja na horizontu

- kut mjenen u 1 girusu:

$$s_k = S_k \sqrt{n}$$

n – broj girusa

Ako ima r stanica u mreži:

$$S_{sr} = \sqrt{\frac{[S_k^2]}{r}}$$

$$S_{sr} = \sqrt{\frac{[S_k^2]}{r}}$$

3. Iz odstupanja zatvaranja trokuta f

$$S_k = \sqrt{\frac{f^T f}{3N}}$$

Ferrerova formula

N – broj trokuta
 f – kutna odstupanja u trokutima

51

Nesigurnost orijentacije (smjernog kuta) i položaja određene točke u mreži

U procesu projektiranja mreže analizira se, osim nesigurnosti mjerenih kutova, nesigurnost i drugih elemenata u mreži:

- Nesigurnost (standardno odstupanje) smjernog kuta vezne strane n -tog trokuta u triangulacijskom lancu.
- Uzdužno odstupanje krajnje točke u lancu trokuta.
- Uzdužno odstupanje krajnje točke u lancu četverokuta.
- Poprečno odstupanje krajnje točke u lancu trokuta.
- Poprečno odstupanje krajnje točke u lancu četverokuta.

52



TRILATERACIJSKE MREŽE

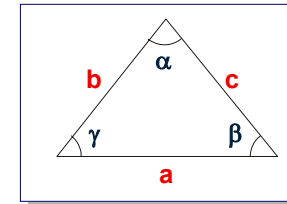
Trilateracijska mreža se također sastoji od niza međusobno povezanih trokuta, ali se u ovom slučaju mjere **duljine** stranica.

Prednosti linearnih mjerenja:

- jednostavan rad s elektronskim daljinomjerima,
- lakši izbor povoljnih uvjeta za opažanje,
- lakše ostvarivanje (mjerenje) dugačkih strana,
- nisu strogi uvjeti u pogledu vidljivosti vizurne marke,
- visoka preciznost mjerenja.

Nedostatak trilateracije: manja mogućnost kontrole mjerenja.

Na osnovu izmjerenih stranica, **računaju** se svi kutovi u pojedinim trokutima. Izmjerene su stranice a, b i c; potrebno je izračunati kutove α, β, γ .



$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

Preciznost kutova kao funkcija preciznosti mjerenih duljina:

$$s_\alpha = \rho'' \frac{a}{2P} \sqrt{s_a^2 + s_b^2 \cos^2 \gamma + s_c^2 \cos^2 \beta}$$

$$s_\beta = \rho'' \frac{b}{2P} \sqrt{s_a^2 \cos^2 \gamma + s_b^2 + s_c^2 \cos^2 \alpha}$$

$$s_\gamma = \rho'' \frac{c}{2P} \sqrt{s_a^2 \cos^2 \beta + s_b^2 \cos^2 \alpha + s_c^2}$$

P – površina trokuta

Pod pretpostavkom da su strane mjerene istom preciznošću: $s_a = s_b = s_c = s_s$, i duljine strana jednake: $a = b = c = s$, tada je standardno odstupanje izračunatih kutova kao funkcija mjerenih duljina:

$$s''_\alpha = s''_\beta = s''_\gamma = s''_k = \frac{s_s}{s} \sqrt{2} \quad \text{odnosno} \quad \frac{s''_k}{\rho''} = \frac{s_s}{s} \sqrt{2} \approx 1,4 \frac{s_s}{s}$$

Ako se želi da izračunati kutovi u trilateracijskoj mreži budu iste preciznosti kao i mjereni kutovi u trigonometrijskoj mreži, tada relativno standardno odstupanje mjerenih strana u trilateracijskoj mreži treba biti 1,4 puta manje u odnosu na standardno odstupanje kutnih mjerenja u trigonometrijskoj mreži.

Primjer: u trigonometrijskoj mreži kutovi su izmjereni sa standardnim odstupanjem $s = 3''$. Da se dobije ista preciznost izračunatih kutova u trilateracijskoj mreži, dužine u toj mreži treba mjeriti s relativnim standardnim odstupanjem:

$$\frac{s_s}{s} = \frac{3''}{206265 \sqrt{2}} \approx \frac{1}{100\,000} \quad 1\text{cm}/1\text{km}$$



Nesigurnost pri elektrooptičkom mjerenju duljina

Duljina:

$$s = \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \left(m + \frac{\Delta \Phi}{2\pi} \right)$$

Varijanca mjerene duljine:

$$\sigma_s^2 = \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 \sigma_{\Delta \Phi}^2 + \sigma_z^2 + \sigma_c^2 + \frac{\sigma_n^2}{n^2} s^2$$

- $\sigma_{\Delta \Phi}$ - standardno odstupanje određivanja faznog inhomogeniteta $\Delta \Phi$
- σ_z - standardno odstupanje određivanja pogreške nule z_0
- σ_c - standardno odstupanje periodičke pogreške
- σ_n - standardno odstupanje određivanja indeksa refrakcije n

λ - valna duljina, $\Delta \Phi$ - fazna razlika, m – broj valnih duljina

Preciznost mjerenja duljina elektrooptičkim daljinomjerima izražava se pomoću dva dijela:

- konstantnog i
- ovisnog o duljini.

$$\sigma_s^2 = a^2 + b^2 s^2$$

U konstantnom dijelu a prikazan je utjecaj pogreške nule, periodičke i fazne pogreške, dok parametar b koji ovisi o duljini s (pogreška mjerila) predstavlja pogrešku određivanja indeksa atmosfere refrakcije i kalibracije frekvencije.

Ukupno standardno odstupanje mjerene duljine:

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_m^2 + a^2 + (s \cdot b \text{ ppm})^2}$$

σ_i i σ_m - nesigurnost centriranja instrumenta i vizurne marke.

57

KOMBINIRANE MREŽE Triangotrilateracijske mreže

U triangotrilateracijskoj mreži mjere se kutovi i duljine.

Idealno kombinirana mreža je ona koja ima izmjerene sve kutove i dužine. Pravilno planirana i izmjerena kombinirana mreža je najbolji mogući tip horizontalne mreže ali izjednačenje takve mreže mora biti provedeno strogo metodom u kojoj se mora uzeti što je više moguće geometrijskih uvjeta.

58

IZJEDNAČENJE GEODETSKE MREŽE

Cilj izjednačenja je:

- matematički definirati mrežu,
- odrediti najbolje procjene traženih veličina,
- izvršiti ocjenu kvalitete dobivenih rezultata.

Sva izjednačenja se mogu podijeliti na:

1. **Približne metode izjednačenja** – postupno približavanje rješenju.
2. **Stroge metode izjednačenja** – kada sve mjerene veličine istovremeno sudjeluju u izjednačenju i ako se izjednačenje provodi po metodi najmanjih kvadrata. Tada se dobiju najbolje procjene traženih veličina.

59

Približne metode izjednačenja triangulacijske mreže

Kod približne metode izjednačenja najprije se zadovolje uvjeti unutar elementarnih figura od kojih se sastoji mreža (trokut, četverokut). Daljnji se uvjeti zadovoljavaju postepenim približavanjem.

Uvjetne jednadžbe:

1. Uvjetne jednadžbe figura
2. Uvjetne jednadžbe horizonta
3. Sinusne ili uvjetne jednadžbe osnovice

Izjednačenje u dvije grupe:

1. Izjednačenje kutova za uvjet: figure (trokuta), uvjet zbroja ili razlike, uvjet horizonta ili uvjet poligona.
2. Sinusni uvjet ili uvjet fiksnih strana.

60

Stroge metode izjednačenja

Osnovna relacija: $l' = l + v$

$l'^T = [l'_1 \ l'_2 \ \dots \ l'_n]$ - vektor izjednačenih vrijednosti opažanja

$l^T = [l_1 \ l_2 \ \dots \ l_n]$ - vektor mjerenih veličina

$v^T = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ - vektor popravaka mjerenih veličina.

Vektor popravaka je nepoznat i treba ga odrediti izjednačenjem.

Princip najmanjih kvadrata - određivanje izjednačenih vrijednosti

mjerenih veličina i nepoznanica zadovoljenjem uvjeta: $v^T P v = \min.$

v - vektor popravaka mjerenih veličina,

P - matrica težina mjerenih veličina.

Stroge metode izjednačenja se mogu podijeliti na:

- uvjetno izjednačenje
- posredno izjednačenje
- kombinacija.

61

Izjednačenje po **uvjetnim** mjerjenjima

Ovaj postupak izjednačenja primjenjuje se kada su same tražene veličine neposredno mjerene, ali njihove najbolje procjene moraju zadovoljiti stanovite matematičke uvjete. Izjednačenjem po uvjetnim mjerjenjima određuju se samo popravci mjerenih veličina bez uvođenja nepoznanica - određuju se najbolje procjene mjerenih veličina l'_i i ocjene točnosti mjerenih veličina i izjednačenih mjerenih veličina. Izjednačenje je moguće ako postoje prekobrojna mjerenja = broj neovisnih uvjeta.

Formiranje uvjetnih jednadžbi. Izjednačene vrijednosti moraju zadovoljiti neke matematičke uvjete koji mogu biti linearni ili nelinearni. Linearizacija se provodi razvojem u Taylorov red – dobivaju se koeficijenti uvjetnih jednadžbi i nesuglasice uvjeta ω .

1. Sustav linearnih uvjetnih jednadžbi

$$A^T v + \omega = 0$$

A - matrica koeficijenata uvjetnih jednadžbi

v - vektor popravaka

ω - vektor slobodnih članova (ω = mjerene - teorijske vrijednosti).

62

Uvjetne jednadžbe moraju biti međusobno neovisne. Broj popravaka v_i odgovara broju mjerenih veličina. To su nepoznanice koje treba odrediti izjednačenjem.

Popravci moraju zadovoljiti princip izjednačenja ($v^T P v = \min.$) i trebaju se ukloniti sve nesuglasice u mjerjenjima ($\omega = 0$) – uvođenje **korelata** (one su nepoznanice).

2. Sustav korelatnih jednadžbi

$$v = Q_{||} A k \quad Q_{||} = P^{-1}$$

$Q_{||}$ - matrica kofaktora mjerenih veličina

k - vektor korelata.

Broj korelatnih jednadžbi jednak je broju mjerenih veličina.

Uvrštenjem korelatnih (2) u uvjetne jednadžbe (1) slijedi:

63

3. Sustav normalnih jednadžbi

$$A^T Q_{||} A k + \omega = 0$$

$$A^T Q_{||} A = N$$

$$N k + \omega = 0$$

N - matrica koeficijenata normalnih jednadžbi.

4. Rješenjem normalnih jednadžbi dobije se vektor korelata:

$$k = - N^{-1} \omega.$$

Uvrštenjem vektora korelata (4) u sustav korelatnih jednadžbi (2) izračunaju se popravke v_i i njihovim sumiranjem sa odgovarajućim mjerenim veličinama l_i dobiju se izjednačene vrijednosti mjerenih veličina l'_i .

64

Ocjena točnosti *a posteriori*

1. Standardno odstupanje jedinične težine (faktor varijance *a posteriori*):

$$s_0 = \sqrt{\frac{v^T P v}{f}}$$

2. Standardno odstupanje mjerenih veličina (na osnovi pripadne težine p_i)

$$s_i = \frac{s_0}{\sqrt{p_i}}$$

3. Standardno odstupanje izjednačenih mjerenih veličina:

$$s_{\hat{i}} = s_0 \sqrt{q_{\hat{i}\hat{i}}}$$

Članovi ispod korijena su dijagonalni elementi korelacijske matrice izjednačenih mjerenih veličina $Q_{\hat{i}\hat{i}}$

65

Izjednačenje po posrednim mjerenjima

Ovaj postupak izjednačenja primjenjuje se kada se tražene veličine (nepoznanice) ne mogu neposredno izmjeriti, nego se određuju pomoću nekih drugih, izmjerenih veličina, sa kojima su funkcijski povezane.

Općenito, pri izjednačenju posrednih mjerenja treba odrediti u vrijednosti nepoznanica x_j ($j = 1, 2, \dots, u$), pomoću n mjerenih veličina l_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sa *a priori* poznatim težinama p_i ($i = 1, 2, \dots, n$), i dati ocjenu preciznosti svih mjerenih i traženih veličina. Izjednačenje je moguće samo kada je $n > u$.

66

Izjednačenje po posrednim mjerenjima provodi se u dva koraka:

1. Računanje **približnih** vrijednosti traženih parametara (koordinata točaka) pomoću neophodnog broja (u) mjerenih veličina.
2. Računanje **priraštaja** (korekcija) približnih vrijednosti. To su nepoznanice koje se dobiju kao rezultat izjednačenja.

67

Na osnovi uvođenja približnih vrijednosti nepoznanica i nakon linearizacije funkcija, slijede:

1. Jednadžbe popravaka

$$v = A x - l$$

Primjenom metode najmanjih kvadrata $v^T P v = \min$, prelazi se na:

2. Sustav normalnih jednadžbi

$$A^T P A x - A^T P l = 0 \quad A^T P A = N, \quad A^T P l = n \\ N x - n = 0$$

Rješenjem normalnih jednadžbi dobiju se najbolje procjene traženih nepoznanica:

$$x = N^{-1} n$$

68

Ocjena točnosti *a posteriori*

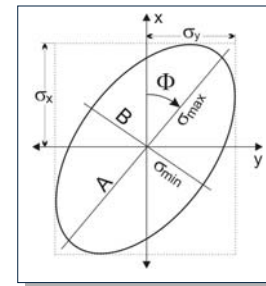
1. Standardno odstupanje koordinata točaka (u smjeru koordinatnih osi):

$$\begin{aligned} s_x &= s_0 \sqrt{q_{xx}} \\ s_y &= s_0 \sqrt{q_{yy}} \end{aligned}$$

q_{xx} i q_{yy} - elementi na glavnoj dijagonali matrice kofaktora nepoznanica $Q_{\hat{x}\hat{x}} = N^{-1} = (A^T P A)^{-1}$.

$$s_0 = \sqrt{\frac{v^T P v}{n - u}} \quad \text{faktor varijance } a \text{ posteriori} \\ \text{(standardno odstupanje jedinične težine).}$$

Elipsa pogrešaka – standardno odstupanje koordinata u svim smjerovima.



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\Phi &= \frac{2q_{xy}}{q_{xx} - q_{yy}} \\ A^2 &= \frac{s_0^2}{2} (q_{xx} + q_{yy} + k) \\ B^2 &= \frac{s_0^2}{2} (q_{xx} + q_{yy} - k) \\ k &= \sqrt{(q_{xx} - q_{yy})^2 + 4q_{xy}^2} \end{aligned}$$

Φ - kut nagiba velike poluosi elipse pogrešaka,
 A, B - velika i mala poluos elipse pogrešaka,
 q_{ii} - elementi korelacijske matrice $Q_{\hat{x}\hat{x}}$.

2. Standardno odstupanje izjednačenih mjerenih veličina

$$s_{\hat{i}} = s_0 \sqrt{q_{\hat{i}\hat{i}}}$$

Članovi ispod korijena su dijagonalni elementi korelacijske matrice izjednačenih mjerenih veličina $Q_{\hat{i}\hat{i}} = A(A^T P A)^{-1} A^T$

POLIGONSKA MREŽA

Poligonska mreža se postavlja unutar triangulacijske mreže ili samostalno. Služi za izmjeru terena ili za iskolčenje objekata.

U poligonometriji se mjere kutovi i duljine.

Prednost pred triangulacijom – sa poligona je dovoljno dogledanje do dvije točke (sa trigonometara je potrebno dogledanje do najmanje tri točke).

Nedostatak – triangulacija omogućava veliki broj prekobrojnih mjerenja što povećava preciznost i pouzdanost rezultata. Kod priključenog poligonskog vlaka, bez obzira na broj točaka u vlaku, postoje samo tri prekobrojna mjerenja.

Zahtjevi koji se postavljaju za poligonski vlak:

Za izmjeru: uvjet iskorištenosti, matematički uvjeti

Za iskolčenje: oblik vlaka i duljine strana prilagođuju se veličini i obliku objekta.

Projekt poligonske mreže

Projekt mreže ovisi o namjeni za koju se postavlja i o načinu na koji se određuje (priključena ili samostalna). Pretprojekt se radi na podlogama 1:2000, 1:5000, 1:10000. Na geodetsku podlogu nanese se sve postojeće točke. Prema njihovom položaju, objektu i reljefu terena projektira se mreža. Nakon izbora lokacije točaka nastaje **projekt**.

Nesigurnost koordinata poligonskih točaka ovisi o:

- geometrijskom obliku mreže (oblik mreže ovisi o terenskim uvjetima i položaju priključnih točaka), odnosno vlaka (ispruženi, iskrivljeni),
- nesigurnosti mjerenja kutova i duljina – ovisi o metodi mjerenja, instrumentu, vanjskim uvjetima,
- točnosti danih veličina (priključnih točaka),
- broju prekobrojnih mjerenja (u obostrano priključenom vlaku, bez obzira na broj poligonskih točaka, broj prekobrojnih mjerenja je uvijek 3, dok ih u mreži ima više).

73

Oblik poligonske mreže

Oblik poligonske mreže za inženjerske radove ovisi o veličini područja koje treba izmjeriti, odnosno objekta kojeg treba iskolčiti, a također i rasporedu priključnih točaka.

Teoretski zahtjevi – što kraći i ispruženiji vlakovi (umetanje čvornih točaka), približna jednakost stranica u pojedinom vlaku, približno jednake duljine vlakova.

Projekt gradske poligonske mreže – vlakovi se postavljaju uzduž ulica.

Za projektiranje trase prometnice (ceste, željeznice) postavljaju se uzduž trase poligonski vlakovi – tzv. **operativni poligoni**.

74

Poligonski vlakovi s obzirom na priključak

1. Obostrano priključeni vlak po koordinatama i smjeru.
2. Priključen samo na početku po koordinatama i smjeru (slijepi vlak).
3. Na početku priključen po koordinatama i smjeru a na kraju samo po koordinatama.
4. Na početku priključen po koordinatama i smjeru a na kraju samo po smjeru.
5. Obostrano priključen samo po koordinatama.

75

Priključak poligonskih vlakova na triangulaciju

Elementi priključka – priključna strana i vezni kut.

- ❖ Direktno određivanje elemenata priključka – priključak na više poznatih točaka.
- ❖ Indirektno određivanje elemenata priključka – jedan ili oba elementa priključka se ne mogu direktno izmjeriti (npr. priključak na visoku točku).

76

Direktno određivanje elemenata priključka

Potrebno je odrediti: φ_p – početni ili završni smjer vlaka

Mjere se, girusnom metodom, pravci (kutovi): $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_p$

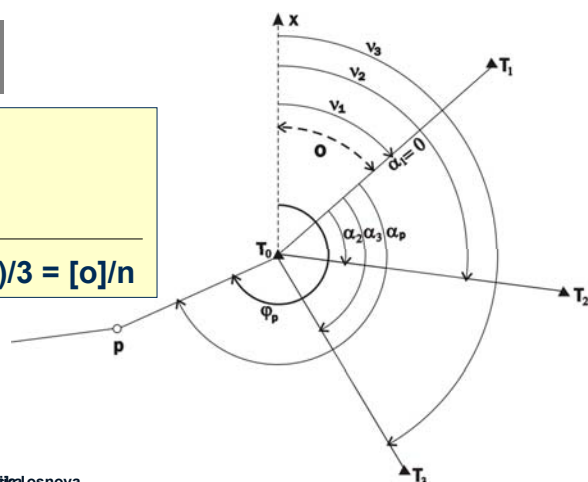
$$\varphi_p = o + \alpha_p$$

$$o_1 = v_1$$

$$o_2 = v_2 - \alpha_2$$

$$o_3 = v_3 - \alpha_3$$

$$o = (o_1 + o_2 + o_3)/3 = [o]/n$$



77

Indirektno određivanje elemenata priključka

- Na terenu se može naći pomoćna točka sa koje se vidi i visoka točka (početna ili završna točka vlaka) i udaljena točka za priključak vlaka (po smjeru).
- Na terenu se ne može naći točka sa koje se vidi udaljena točka poznata po koordinatama (česti slučaj u gradu). Tada se opažanja provode ekscentrično.

Elementi centriranja:

- linearni ekscentricitet
- kutni ekscentricitet.

Pri određivanju elemenata centriranja mogu se pojaviti dva slučaja:

- Direktno određivanje elemenata centriranja.
- Indirektno određivanje elemenata centriranja.

78

Ocjena točnosti mjerenja u poligonometriji

Ocjena točnosti mjerenja poligonske mreže i koordinata poligonskih točaka može se provesti:

- **Prije mjerenja** - ocjena točnosti **a priori** (utječe na izbor metode rada, instrumentarija i dr.).
 - **Nakon mjerenja**
 - **Nakon izjednačenja**
- } - ocjena točnosti **a posteriori**

79

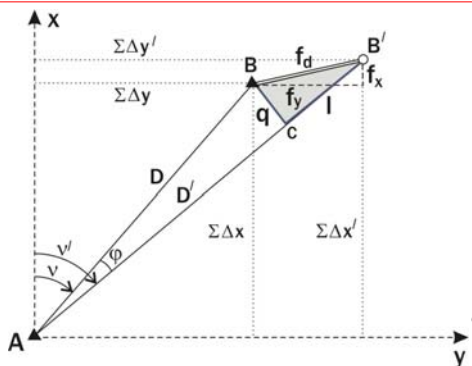
Nesigurnost mjerenih veličina u vlaku i pogreške danih veličina iskazuju se pomoću linearnih odstupanja u vlaku:

- **ukupno linearno odstupanje (f_d)** za iskrivljene vlakove,
- **uzdužno (l) i poprečno (q) odstupanje** u ispruženim vlakovima.

Uzdužno i poprečno odstupanje u vlaku su mjerilo preciznosti rada u poligonometriji, a i osnova za dozvoljena odstupanja u vlaku.

80

Uzdužno i poprečno odstupanje u ispruženom poligonskom vlaku



$D' - D = l$ - uzdužno odstupanje
 $BC = q$ - poprečno odstupanje (linearna mjera)
 $\varphi = \varphi' - \varphi$ - poprečno odstupanje (kutna mjera)
 $l_0 = \frac{l}{D}$ - relativno uzdužno odstupanje (uzdužno odstupanje na jedinicu duljine)

$\varphi_0 = \frac{q}{D'} = \frac{\varphi}{D}$ - relativno poprečno odstupanje

$$l = \frac{f_y \sum \Delta y' + f_x \sum \Delta x'}{D'} = \frac{f_y \sum \Delta y' + f_x \sum \Delta x'}{\sqrt{(\sum \Delta y')^2 + (\sum \Delta x')^2}}$$

$$q = \frac{f_y \sum \Delta x' - f_x \sum \Delta y'}{D'} = \frac{f_y \sum \Delta x' - f_x \sum \Delta y'}{\sqrt{(\sum \Delta y')^2 + (\sum \Delta x')^2}}$$

Kontrola:

$$f_d = \sqrt{f_y^2 + f_x^2} = \sqrt{l^2 + q^2}$$

81

Novaković G.: Inženjerska geodezija I

Dozvoljena odstupanja u poligonskom vlaku

1. Dozvoljeno kutno odstupanje: $\Delta_\beta = 3s_{f_\beta} = 3s_\beta \sqrt{n}$

s_β - nesigurnost mjerenja kutova (ovisi o broju girusa, podatku instrumenta, vizurnoj znački).

2. Dozvoljena linearna odstupanja:

➤ Za ispružene i blago zakrivljene vlakove

- a. dozvoljeno uzdužno odstupanje – ovisi o načinu mjerenja duljina, duljini vlaka.
- b. dozvoljeno poprečno odstupanje – ovisi o broju kutova, broju girusa, podatku instrumenta, vizurnoj znački.

➤ Za zakrivljene vlakove – ukupno linearno odstupanje (f_d) ne smije biti veće od dozvoljenog uzdužnog odstupanja u ispruženim vlakovima.

82

Novaković G.: Inženjerska geodezija I

Procjena nesigurnosti kutnih mjerenja u poligonskoj mreži

1. Standardno odstupanje kuta određeno pomoću odstupanja od aritmetičke sredine višestruko mjenog kuta:

$$s_{\beta_i} = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \quad \text{standardno odstupanje mjerenja kuta}$$

$$s_\beta^2 = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s s_{\beta_i}^2 \quad s - \text{broj poligonskih točaka}$$

Ovo je unutarnja preciznost kutova (nema pogreške centriranja, refrakcija i dr.).

83

Novaković G.: Inženjerska geodezija I

2. Standardno odstupanje kuta izračunato pomoću kutnih odstupanja f_β u vlakovima:

$$s_{\beta_i} = \sqrt{\frac{[p f_\beta^2]}{N}}$$

f_β – kutno odstupanje u pojedinom vlaku
 p – težina kutnog odstupanja ($p = 1/n$)
 N – broj vlakova u mreži

Sadrži i nesigurnost centriranja, refrakciju, pogreške danih veličina.

3. Standardno odstupanje kuta određeno iz poprečnih odstupanja q u ispruženim vlakovima:

$$s_{\beta_i} = \sqrt{\frac{[p q^2]}{N}} \quad p = \frac{C_i}{L_i^2} \quad C_i = \frac{12}{n+3} \quad n - \text{broj stranica u vlaku}$$

L_i – dijagonala vlaka

Sadržava cjelokupnu nesigurnost mjerenja kutova – najbolja procjena preciznosti mjerenja kuta.

84

Novaković G.: Inženjerska geodezija I

4. Standardno odstupanje mjenog kuta izračunato nakon izjednačenja mreže:

$$s_{\beta} = s_0 \sqrt{q_{ii}}$$

s_{β} standardno odstupanje izjednačenih mjenih veličina

s_0 standardno odstupanje jedinične težine (faktor varijance *a posteriori*)

q_{ii} elementi na dijagonali matrice izjednačenih mjenih veličina.

Procjena nesigurnosti linearnih mjerenja u poligonskoj mreži

1. Standardno odstupanje dužine određeno pomoću odstupanja od aritmetičke sredine

$$s_d = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \quad n - \text{ broj ponavljanja}$$

2. Standardno odstupanje dužine izračunato pomoću razlika dvostrukih mjerenja

Standardno odstupanje jedinične težine: $\mu = \sqrt{\frac{p\delta^2}{2n}}$

δ - razlika dvostrukih mjerenja $\delta_i = d'_i - d''_i$
 p - težina razlike δ_i $p_i = 1/d_i$
 n - broj strana.

Ako u razlikama prevladava jedan predznak znači da su dužine opterećene sustavnim odstupanjima, pa se tada standardno odstupanje jedinične težine računa po formuli:

$$\mu = \sqrt{\frac{p\delta'^2}{2(n-1)}} - \text{ koeficijent utjecaja slučajnih odstupanja}$$

δ'_i - razlike dvostrukih mjerenja oslobođene sustavnih utjecaja

$$\delta'_i = \delta_i - \lambda d_i$$

$$\lambda = \frac{[\delta]}{[d]} - \text{ koeficijent utjecaja sustavnih odstupanja}$$

Standardno odstupanje mjerene duljine:

$$s_d^2 = \mu^2 d + \lambda^2 d^2$$

3. Standardno odstupanje dužine izračunato pomoću uzdužnih odstupanja u ispruženim vlakovima:

Standardno odstupanje jedinične težine: $\mu = \sqrt{\frac{pl^2}{N}}$

l - uzdužno odstupanje u vlaku

p - težine $p_i = 1/d_i$

N - broj vlakova

Kako je $p_i = 1/d_i \Rightarrow \mu = \sqrt{\frac{1}{N} \left[\frac{l^2}{L} \right]}$ L - dijagonala vlaka

Ako postoje sustavna odstupanja: $\mu = \sqrt{\frac{1}{N} \left[\frac{l^2}{L} \right]}$

$l'_i = l_i - \lambda L_i$ $\lambda = \frac{[l]}{[L]}$ - koeficijent utjecaja sustavnih odstupanja

Standardno odstupanje mjerene duljine:

$$s_d^2 = \mu^2 L + \lambda^2 L^2$$

4. Standardno odstupanje dužine izračunato nakon izjednačenja mreže:

$$s_d = s_0 \sqrt{q_{ii}}$$

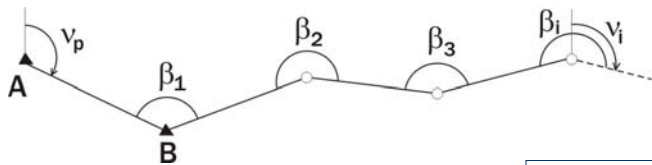
- s_d standardno odstupanje izjednačenih mjerenih veličina
- s_0 standardno odstupanje jedinične težine
- q_{ii} elementi na dijagonali matrice izjednačenih mjerenih veličina.

Utjecaj nesigurnosti mjerenja na pojedine elemente vlaka

1. Nesigurnost **smjernog kuta** u poligonskom vlaku:
 - u slijepom poligonskom vlaku
 - u obostrano priključenom poligonskom vlaku.
2. Nesigurnost **koordinata** zadnje točke **slijepog** poligonskog vlaka (važno za tunel).
3. Nesigurnost **koordinata** zadnje točke **obostrano priključenog** poligonskog vlaka.
4. **Uzdužno i poprečno** odstupanje **središnje** točke obostrano priključenog poligonskog vlaka.

1. Nesigurnost smjernog kuta u poligonskom vlaku

a) Nesigurnost smjernog kuta u slijepom poligonskom vlaku



Bilo koji smjerni kut u vlaku, računa se po formuli: $v_i = v_p + \sum_1^i \beta \pm i \cdot 180^0$

Prema zakonu o prirastu varijanci, varijanca i - tog smjernog kuta u vlaku se računa:

$$s_{v_i}^2 = s_{v_p}^2 + i \cdot s_{\beta}^2$$

- s_{v_p} standardno odstupanje početnog smjernog kuta
- s_{β} standardno odstupanje mjerenja kutova β

b) Nesigurnost smjernog kuta u obostrano priključenom poligonskom vlaku

U ovom slučaju povećava se točnost određivanja smjernog kuta u vlaku. I ovdje se bilo koji smjerni kut u vlaku računa po formuli:

$$v_i = v_p + \sum_1^i \beta \pm i \cdot 180^0$$

ali su kutovi β međusobno vezani uvjetom zadanih smjernih kutova. Oblik uvjetne jednadžbe:

$$(v_1 + v_2 + \dots + v_i + \dots + v_n) - f_{\beta} = 0$$

$$(f_{\beta} = (v_p + \sum \beta - n \cdot 180^0) - v_i)$$

Uz pretpostavku: $s_{v_p} = s_{v_i} = s_v \implies$

$$s_{v_i}^2 = \frac{s_v^2}{2} + s_{\beta}^2 \frac{i(n-i)}{n}$$

Maksimalna vrijednost gornjeg izraza bit će u sredini vlaka, tj. za $i = n/2$:

$$s_{v_i, \max.}^2 = \frac{s_v^2}{2} + s_{\beta}^2 \frac{n}{4}$$

(n – broj svih mjerenih kutova u vlaku)

a minimalna na početku i kraju vlaka:

$$s_{v_i, \min.}^2 = \frac{s_v^2}{2} + s_{\beta}^2 \frac{n-i}{n}$$

2. Nesigurnost **koordinata** zadnje točke slijepog poligonskog vlaka

Značajno kod proboja tunela

Koordinate zadnje točke slijepog poligonskog vlaka:

$$F_1 = y_n = y_1 + \sum_1^n \Delta y = y_1 + \sum_1^n d \cdot \sin \nu$$

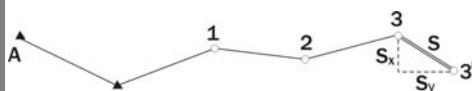
$$F_2 = x_n = x_1 + \sum_1^n \Delta x = x_1 + \sum_1^n d \cdot \cos \nu$$

Pretpostavka: $s_{\beta 1} = s_{\beta 2} = \dots = s_{\beta n} = s_{\beta}$ $s_{di} = s_d$

Standardno odstupanje zadnje točke u slijepom poligonskom vlaku, u smjeru koordinatnih osi:

$$S_y^2 = \sum_1^n (d \cdot \sin^2 \nu) \cdot \mu^2 + \left[(x_n - x_i)^2 \right] \frac{s_{\beta}^2}{\rho^2}$$

$$S_x^2 = \sum_1^n (d \cdot \cos^2 \nu) \cdot \mu^2 + \left[(y_n - y_i)^2 \right] \frac{s_{\beta}^2}{\rho^2}$$



93

μ - koeficijent utjecaja slučajnih odstupanja linearnih mjerenja:

$$s_d = \mu \sqrt{d} \implies \mu = \frac{s_d}{\sqrt{d}}$$

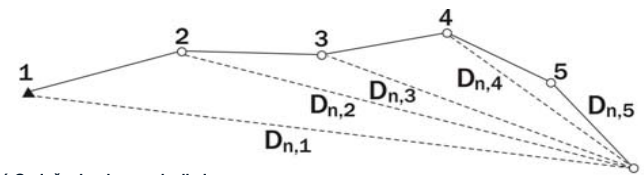
Ako osim slučajnih odstupanja postoje i sustavna, tada se standardno odstupanje dužine računa:

$$s_d^2 = \mu^2 d + \lambda^2 d^2 \quad \lambda = \frac{\sum l}{\sum L} \quad \begin{array}{l} l - \text{uzdužno odstupanje} \\ L - \text{dijagonala vlaka} \end{array}$$

Ukupno linearno odstupanje položaja zadnje točke u slijepom poligonskom vlaku:

$$S^2 = S_y^2 + S_x^2 = \mu^2 \sum d + \lambda^2 L^2 + \frac{s_{\beta}^2}{\rho^2} \sum D_{n,i}^2$$

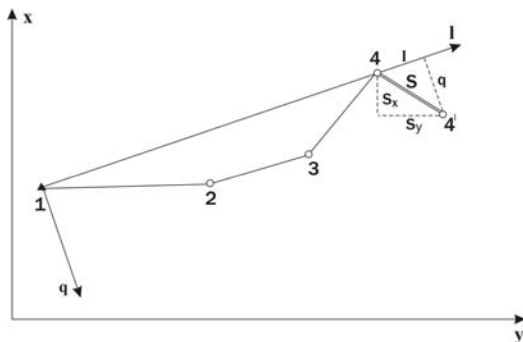
$D_{n,i}$ - udaljenost između krajnje i pojedinih točaka vlaka (udaljenosti se računaju iz koordinata točaka)



Novaković G.: Inženjerska geodezija I

94

Ovo je bila položajna nesigurnost zadnje točke u smjeru koordinatnih osi y i x. Pređimo na uzdužno i poprečno odstupanje u vlaku l i q . Dijagonala vlaka je apscisa os l , a okomica na nju u početnoj točki vlaka je ordinata q .



U tom slučaju standardno odstupanje ordinate zadnje točke u vlaku je poprečno odstupanje S_q , a standardno odstupanje apscise je uzdužno odstupanje S_l .

$$S_y = S_q, \quad S_x = S_l, \quad \Delta y = \Delta q, \quad \Delta x = \Delta l$$

95

Pretpostavka: vlak je ispružen i istostraničan \implies

$$\sum D_{n,i}^2 = \frac{n(2n-1)}{6(n-1)} L^2, \quad L = (n-1)d$$

Uzdužno i poprečno odstupanje u vlaku:

$$S_l = s_d \sqrt{n-1}$$

$$S_q = \frac{s_{\beta}}{\rho} L \sqrt{\frac{n(2n-1)}{6(n-1)}}$$

odnosno:

$$S_l = s_d \sqrt{\frac{L}{d}} = \mu \sqrt{L}$$

$$S_q \approx \frac{s_{\beta}}{\rho} \sqrt{\frac{L^3}{3d}}$$

Propisano dozvoljeno uzdužno i poprečno odstupanje u vlaku

96

Standardno odstupanje položaja zadnje točke u slijepom poligonskom vlaku, koje uključuje slučajna i sustavna odstupanja linearnih mjerenja:

$$S^2 = S_l^2 + S_q^2 = \mu^2 L + \lambda^2 L^2 + L^2 \frac{s_\beta^2}{\rho^2} \sqrt{\frac{n(2n-1)}{6(n-1)}}$$

U formulu za dozvoljeno uzdužno i poprečno odstupanje u vlaku uvrsti se odnos duljine dijagonale prema duljini strana; $L = (n-1)/d$. Zbog pojednostavljenja može se formula za S_q aproksimirati, pa se dobiva:

$$S_l = s_d \sqrt{\frac{L}{d}} = \mu \sqrt{L}$$

$$S_q \approx \frac{s_\beta}{\rho} \sqrt{\frac{L^3}{3d}}$$

- službeno dopuštena odstupanja

97

Što se može zaključiti iz ovih formula?

- S_l – proporcionalno preciznosti mjerenja duljina s_d i duljini vlaka L .
- S_q – neposredno ovisno o preciznosti mjerenja kutova s_β , a obrnuto proporcionalno \sqrt{d} .

Da se smanji S_q potrebno je:

1. povećati preciznost mjerenja kutova; izborom preciznijeg instrumenta, točnijeg pribora za signalizaciju (prisilno centriranje),
2. povećati duljine stranica vlaka, odnosno uzeti što manji broj stranica.

Na prvo se može utjecati dok drugo ovisi o konkretnim terenskim prilikama.

98

3. Nesigurnost koordinata zadnje točke obostrano priključenog poligonskog vlaka

U ovom slučaju, prethodno su korigirani kutovi β za uvjet nesuglasica u sumi kutova. Suma koordinatnih razlika do zadnje točke u vlaku dana je formulom:

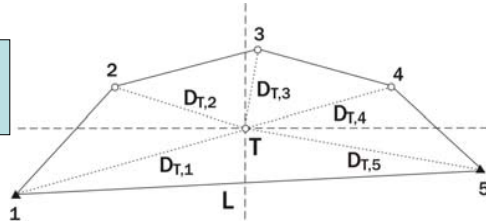
$$F_1 = \sum_1^n \Delta y = \sum_1^n d \cdot \sin \nu$$

$$F_2 = \sum_1^n \Delta x = \sum_1^n d \cdot \cos \nu$$

Ukupno položajno odstupanje zadnje točke u obostrano priključenom vlaku je:

$$S^2 = S_y^2 + S_x^2 = \mu^2 \sum d + \lambda^2 L^2 + \frac{s_\beta^2}{\rho^2} \sum D_{T,i}^2$$

$D_{T,i}$ - udaljenost između težišta vlaka i pojedinih točaka u vlaku



Koordinate težišta vlaka:

$$y_T = \frac{\sum_1^n y}{n} \quad x_T = \frac{\sum_1^n x}{n}$$

99

Ako je vlak istostraničan i ispružen:

$$S_y^2 = (\mu^2 L + \lambda^2 L^2) \sin^2 \nu + L^2 \frac{n(n+1)}{12(n-1)} \frac{s_\beta^2}{\rho^2} \cos^2 \nu$$

$$S_x^2 = (\mu^2 L + \lambda^2 L^2) \cos^2 \nu + L^2 \frac{n(n+1)}{12(n-1)} \frac{s_\beta^2}{\rho^2} \sin^2 \nu$$

Mjerilo točnosti za obostrano priključeni vlak su uzdužno i poprečno odstupanje S_l i S_q .

Pretpostavka: vlak je ispružen i istostraničan →

$$S_l^2 = \mu^2 L + \lambda^2 L^2$$

$$S_q^2 = \frac{s_\beta^2}{\rho^2} L^2 \frac{n(n+1)}{12(n-1)}$$

100

Ukupno odstupanje koordinata zadnje točke u obostrano priključenom vlaku:

$$S^2 = S_l^2 + S_q^2 = \mu^2 L + \lambda^2 L^2 + \frac{s_\beta^2}{\rho^2} L^2 \frac{n(n+1)}{12(n-1)}$$

Da bi se poprečno odstupanje izrazilo približnom formulom, postavlja se da je $(n+1) \sim (n-1)$, a $n \sim L/d$. Time će formula za poprečno odstupanje u poligonskom vlaku biti izražena odnosom duljine dijagonale i duljine poligonske strane:

$$S_l = s_d \sqrt{\frac{L}{d}} \quad \text{- službeno dopuštena odstupanja}$$
$$S_q \approx \frac{s_\beta}{\rho} \sqrt{\frac{L^3}{12d}}$$

101

Usporedi li se poprečno odstupanje u slijepom vlaku sa ovim, dobivenom nakon izjednačenja, može se zaključiti da se oslanjanjem vlaka na dvije date točke smanjuje samo poprečno odstupanje i to za dvostruki iznos, ali je nepovoljno to što je direktno proporcionalno $\sqrt{L^3}$. Radi toga je priključak vlaka po smjeru ne samo kontrola, nego se i smanjuje poprečno odstupanje u poligonskom vlaku.

Ukoliko je poligonski vlak priključen na kraju samo po koordinatama tada nema uvjeta smjernih kutova, i u pogledu poprečnog odstupanja na kraju vlaka, prije izjednačenja po koordinatama, vrijede formule za slijepi vlak. Međutim, to ipak predstavlja kontrolu s obzirom na mjerenje duljina.

102

4. Uzdužno i poprečno odstupanje koordinata središnje točke obostrano priključenog poligonskog vlaka

Pretpostavka: vlak je istostraničan i ispružen. Formule su predstavljene kao funkcija dijagonale vlaka: $L = (n-1)d$:

$$s_l = s_d \sqrt{\frac{L}{4d}}$$
$$s_q = \frac{s_\beta}{\rho} \sqrt{\frac{L^3}{192d}}$$

Ako se ove formule usporede sa formulama za uzdužno i poprečno odstupanje zadnje točke obostrano priključenog vlaka, vidi se da je:

$$s_l = \frac{1}{2} S_l$$
$$s_q = \frac{1}{4} S_q$$

Nakon izjednačenja, uzdužno odstupanje u sredini vlaka je za polovinu manje od onog na kraju, a poprečno odstupanje četiri puta manje.

103

Iskrivljeni poligonski vlak

Usporedbom uzdužnog i poprečnog odstupanja iskrivljenog vlaka sa onima u ispruženom, dolazi se do zaključka da poprečno odstupanje raste s iskrivljenošću vlaka, naročito kod kratkih vlakova. Može se dogoditi da formule za dozvoljena odstupanja koje vrijede za ispruženi vlak više nisu dovoljne.

Čvorna točka

Postavljanjem čvorne točke izbjegavaju se dugački iskrivljeni vlakovi u kojima bi moglo doći do velikih poprečnih odstupanja. Time se povećava točnost u određivanju koordinata poligonskih točaka i postiže pravilniji raspored popravaka u mreži. Osim toga mogu se primijeniti približne metode izjednačenja poligonskih vlakova, koji će za specijalne povoljne oblike postati stroga izjednačenja.

104

Da bi se učvoravanjem postigla maksimalna točnost koordinata čvorne točke, i da bi se njeno izjednačenje moglo izvesti jednostavnijom, približnom metodom, potrebno je pridržavati se slijedećih pravila:

1. Vlakovi koji se učvoruju trebaju biti prosječno jednake duljine i da pojedinačno što bolje zadovoljavaju zahtjev ispruženosti i istostraničnosti.
2. Vlakovi trebaju biti pravilno raspoređeni oko horizonta čvorne točke, tj. da čvorna točka bude u njihovom težištu. Time će se postići jednostavnije izjednačenje.
3. Orijentaciju u čvornoj točki treba izvršiti po mogućnosti na neki trigonometar. Time bi svaki vlak bio priključen po smjeru i time bi se izjednačenje čvorne točke svelo na izjednačenje samo koordinata.

105

Izjednačenje poligonskih vlakova i poligonske mreže

Izjednačenje u poligonometriji se može podijeliti na:

- Izjednačenje pojedinačnih vlakova.
- Izjednačenje poligonske mreže.

Približne metode

Stroge metode:

- izjednačenje po uvjetnim mjerenjima,
- izjednačenje po posrednim mjerenjima,
- kombinirano izjednačenje.

106

Usporedba metoda izjednačenja poligonskih vlakova

- Za izjednačenje vlakova najčešće se koriste približne metode (prosta i stroža) koje daju dobre rezultate ako su vlakovi ispruženi i sa približno jednakim stranama. Osnovni nedostatak približnih metoda je što se ne vodi računa o težinama kutnih i linearnih veličina u vlaku.
- Stroga metoda daje najbolje rezultate, a naročito kada težine realno odražavaju preciznost kutnih i linearnih veličina i kad su sustavna odstupanja odstranjena iz rezultata mjerenja. Stroga metoda se primjenjuje kod jače izlomljenih vlakova.
- Oblik vlaka znatno utječe na točnost određivanja koordinata poligonskih točaka i na iznos uzdužnog i poprečnog odstupanja, koji su manji u ispruženom vlaku. To je razlog da se projektiraju ispruženi vlakovi (a ne radi obima računanja).

107

Izjednačenje poligonske mreže

Stroge i približne metode

Stroge metode (istovremeno izjednačenje svih vlakova u mreži) - rijetko se koriste u praksi.

Za potrebe inženjerske prakse dovoljna su približna rješenja i u većini slučajeva daju zadovoljavajuće rezultate.

Najjednostavniji oblik poligonske mreže je jedna čvorna točka. Poligonska mreža sa više čvornih točaka može se izjednačiti metodom uvjetnih ili posrednih mjerenja.

108

Postupak približnog izjednačenja poligonske mreže:

1. Izjednačenje kutnih veličina – određuju se smjerni kutovi zajedničkih strana u čvornoj točki.
2. Izjednačenje linearnih veličina (točnije koordinatnih razlika) – određuju se koordinate čvornih točaka, koje služe kao priključne točke za vlakove koji počinju ili završavaju na njima.
3. Izjednačenje svakog vlaka posebno.

109

Približno izjednačenje poligonske mreže metodom uvjetnih mjerenja

U poligonskoj mreži postoje samo uvjeti figura: zatvoreni poligoni i poligoni priključeni na trigonometrijske točke, a čine ih poligonski vlakovi između čvornih točaka.

Ukupan broj uvjetnih jednažbi r (broj normalnih jednažbi):

$$r = N - u$$

N – broj vlakova

u – broj čvornih točaka.

110

Približno izjednačenje poligonske mreže metodom posrednih mjerenja

Nepoznanice su: smjerni kutovi odabranih strana u čvornim točkama i koordinate čvornih točaka.

Redosljed rada:

1. Određivanje približnih vrijednosti smjernih kutova zajedničkih strana i koordinata čvornih točaka kao u slijepom vlaku.
2. Formiranje jednažbi odstupanja za smjerne kutove.
3. Formiranje normalnih jednažbi; rješenjem se dobiju priraštaji za smjerne kutove (priraštaji + približno = definitivno).
4. Formiranje jednažbi odstupanja za apscise i ordinate.
5. Formiranje normalnih jednažbi; rješenjem se dobiju priraštaji koordinata čvornih točaka (priraštaji + približno = definitivno).

111

MREŽA TOČAKA ODREĐENA PRESJEKOM LUKOVA

Presjekom lukova određuju se položaji pojedinih točaka ili grupe točaka. Mjere se duljine između poznatih i traženih točaka. Izjednačenje - metodom posrednih mjerenja.

Određivanje približnih koordinata točaka, presjekom lukova, može se provesti na nekoliko načina:

- trigonometrijski,
- analitički,
- algebarski.

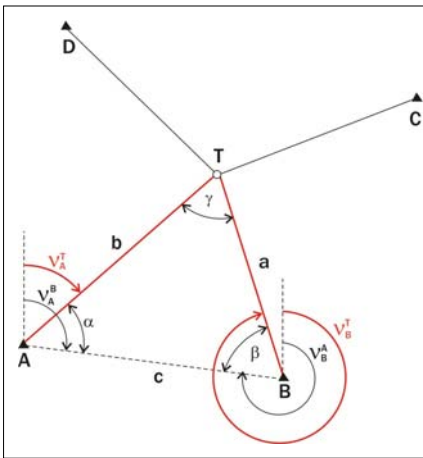
112

Trigonometrijsko određivanje približnih koordinata točke

Poznato: koordinate točaka A i B

Mjereno: duljine a i b

Traže se: približne koordinate točke T



$$\begin{aligned}y_T' &= y_A + b \cdot \sin v_A^T & y_T'' &= y_B + a \cdot \sin v_B^T \\x_T' &= x_A + b \cdot \cos v_A^T & x_T'' &= x_B + a \cdot \cos v_B^T \\v_A^T &= v_A^B - \alpha & v_B^T &= v_B^A + \beta\end{aligned}$$

Pomoću koordinata točaka A i B izračuna se stranica c. Na osnovu poznatih stranica, izračunaju se (cos ili tg poučak) svi kutovi u trokutu.

Definitivne približne koordinate točke T:

$$\begin{aligned}y_T &= \frac{y_T' + y_T''}{2} \\x_T &= \frac{x_T' + x_T''}{2}\end{aligned}$$

113

Novaković G.: Inženjerska geodezija I

Algebarsko određivanje približnih koordinata točke

Približne koordinate točke T (y_T x_T) dobiju se rješanjem jednadžbi:

$$\left[(y_T - y_A)^2 + (x_T - x_A)^2 \right] - b^2 = 0$$

$$\left[(y_T - y_B)^2 + (x_T - x_B)^2 \right] - a^2 = 0$$

Strogo izjednačenje metodom posrednih mjerenja

U izjednačenju sudjeluju sve duljine mjerene između poznatih točaka i točke čije se koordinate određuju. Kao rezultat izjednačenja dobiju se priraštaji koji se dodaju približnim vrijednostima nepoznanica – definitivne koordinate točke T. Osim toga, na osnovi rezultata izjednačenja može se izvršiti i ocjena nesigurnosti izjednačenih mjerenja i položaja (koordinata) točke T (standardna odstupanja u smjeru osi y i x i elipsa pogrešaka).

114

Novaković G.: Inženjerska geodezija I

ZAKLJUČAK

1. Horizontalna mreža koja se koristi u inženjerskoj geodeziji mora biti određena s točnošću koja se određuje *a priori* u projektu, a koja ovisi o važnosti i veličini objekta.
2. Prilikom izrade projekta mreže, prvenstveno treba mrežu prilagoditi objektu i terenskim uvjetima, a zatim utvrditi takav oblik mreže koji osigurava zahtijevanu točnost njenih elemenata (koordinata točaka, stranica, smjernih kutova). Nakon analize odabire se najpovoljnija varijanta mreže.
3. Potrebno je utvrditi točnost mjerenih elemenata u mreži, a zatim osigurati uvjete da se utvrđena točnost i ostvari (izbor metode izmjere, instrumentarija, način stabilizacije, vrijeme mjerenja i dr.)
4. Nakon korekcija i redukcija mjerenih veličina, mreža se izjednačava ili u lokalnom koordinatnom sustavu ili kao priključena.
5. Nakon izjednačenja potrebno je izvršiti ocjenu točnosti dobivenih rezultata i usporediti sa traženom točnošću. Točnost rezultata treba biti u skladu sa unaprijed utvrđenom točnošću na osnovi koje je razrađen cjelokupni proces rada, od projektiranja mreže do određivanja koordinata točaka u mreži.

115

Novaković G.: Inženjerska geodezija I

MREŽA LINIJA ZA ISKOLČENJE

Mreža linija, kao geodetska osnova za iskolčenje, postavlja se za objekte koji se prostiru na većem području, gdje se gradnja odvija dulje vrijeme prema stanovitom redoslijedu građenja – izgradnja ili regulacija gradova ili izgradnja većih industrijskih postrojenja.

Mreža linija može biti samostalna mreža ili priključena. Mreža se može sastojati od kvadrata, pravokutnika ili trapeza; ovisi o objektu.

Mreža linija služi kao osnovni koordinatni sustav za sva iskolčenja.

Mreža linija se projektira na idejnom projektu na kojem se vidi smještaj glavnih objekata, prometnica, podzemnih instalacija i dr. Prema tim objektima postavlja se mreža linija tako da okvirne linije mreže obuhvate cijeli prostor. Glavna linija mreže ili jedna okvirna linija postavlja se paralelno s glavnom osi projektiranog objekta.

116

Novaković G.: Inženjerska geodezija I

Nivelmanska mreža na gradilištu

Državna nivelmanska mreža - za potrebe idejnog projekta.

Specijalna nivelmanska mreža - specifične potrebe s obzirom na točnost i položaj repera.

Točnost visinske osnove izračunava se na osnovu potrebne točnosti visinskih elemenata koja je zadana projektom.

117

Projekt nivelmanske mreže treba uzeti u obzir nekoliko elemenata koji utječu na njezin oblik, točnost mjerenja i stabilizaciju repera. To su:

- prostiranje gradilišta,
- smještaj objekta (nad, na ili pod zemljom),
- vrsta objekta (hidrotehnički, montažni i dr.),
- kvaliteta zemljišta i dr.

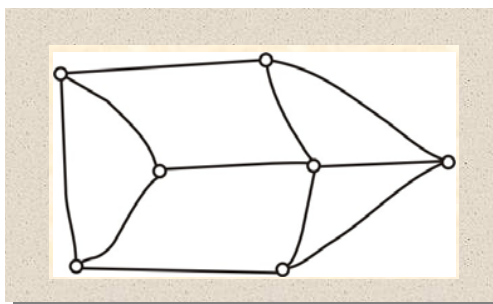
Projekt visinske osnove sadrži:

- plan ili kartu 1:5000 do 1:10000,
- način stabilizacije repera, proračun točnosti mreže, metodu rada, način obrade podataka,
- analizu troškova.

118

Oblik nivelmanske mreže

Na gradilištu, nivelmanska mreža ima oblik zatvorenih poligona bez obzira na vrstu i veličinu objekta.



119

Stabilizacija repera

Za horizontalno ugrađivanje - reperi otporni na udare.
Za vertikalno ugrađivanje - reperi s okruglim glavama ili metalne šipke (lijevano željezo, bronza).

Gdje postaviti repere? Dva su glavna zahtjeva:

- što bliže objektu (radi smanjenja prijenosa pogrešaka),
- izvan područja deformacija (radi stabilnosti).

Da se zadovolje gornji zahtjevi, na gradilištu se postavljaju dvije vrste repera:

1. Osnovni (referentni) reperi
2. Radni reperi.

120

Osnovni reperi ili polazni reperi – nalaze se na stabilnom tlu, izvan područja građenja, a konstrukcija repera ovisi o vrsti tla:

- fundamentalni reperi - u stijeni,
- reperi na betonskim stupovima – ako je tlo zemljano,
- dubinski reperi – podzemni (rudnici, bušotine).

Najstabilniji su reperi stabilizirani u stijeni.

Radni reperi – nalaze se u blizini objekta a priključuju se na osnovne repere – formiraju se priključeni ili zatvoreni nivelmanski vlakovi.

Za osjetljive objekte postavljaju se 3 radna repera, a za manje osjetljive 2 (na suprotnim stranama objekta).

121

Metode određivanja visinskih razlika u inženjerskim radovima

- Geometrijski nivelman
- Trigonometrijski nivelman
- Hidrostatski nivelman
- Fotogrametrijski nivelman

Razlikuju se:

- apsolutne visine – u odnosu na geoid
- relativne visine – u odnosu na proizvoljno odabrani nulti horizont.

Važno je postići potrebnu točnost u visinskom relativnom smještaju pojedinih objekata na gradilištu.

122

Za precizne radove uglavnom se koriste:

Geometrijski nivelman - visinske razlike određuju se horizontalnim vizurama.

Trigonometrijski nivelman - visinske razlike određuju se mjerenjem vertikalnih kutova i duljina.



123



Nesigurnost pri mjerenju geometrijskim nivelmanom

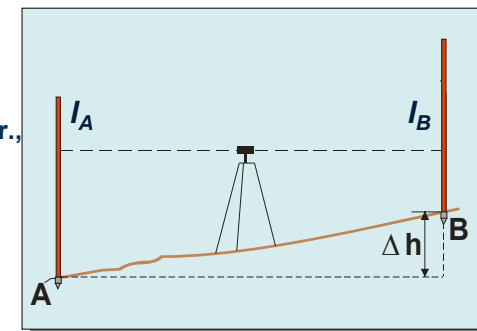
Visinska razlika: $\Delta h = I_A - I_B$

Slučajna odstupanja:

- nesigurnost očitavanja letve,
- nesigurnost horizontiranja instr.,
- nevertikalnost letve.

Sustavna odstupanja:

- pogreška vizurne osi,
- zakrivljenost Zemlje,
- atmosferska vertikalna refrakcija,
- spuštanje instrumenta i letve. Pogreške mjerne letve su: pogreška podjele letve (mjerila) i pogreška indeksa letve (pogreška nule letve).



124

Standardno odstupanje visinske razlike određene geometrijskim nivelmanom (ako se, zbog niveliranja iz sredine, zanemari zakrivljenost Zemlje, refrakcija i pogreška vizurne osi):

$$\sigma_{\Delta h} = D \sqrt{2N(\sigma_{r/D}^2 + \sigma_{\alpha}^2)}$$

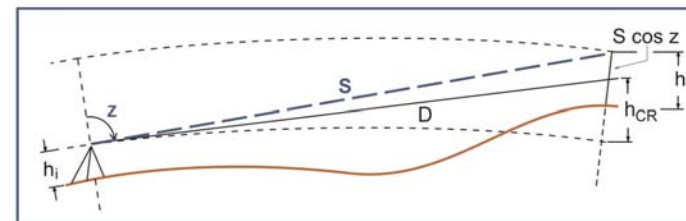
- D - duljina vizure od instrumenta do letve,
- N - broj stajališta,
- $\sigma_{r/D}$ - nesigurnost očitavanja letve na jedinicu duljine vizure,
- σ_{α} - nesigurnost horizontiranja instrumenta.

U nivelmanskoj mreži koja se koristi na gradilištu, potrebno je poznavati nesigurnost kojom je određena visina nekog repera. Ako je poznata nesigurnost određivanja visine polaznog repera A, nesigurnost određivanja visine repera B će biti:

$$\sigma_{H_B} = \sqrt{\sigma_{H_A}^2 + \sigma_{\Delta h}^2}$$

125

Nesigurnost pri mjerenju trigometrijskim nivelmanom



Visinska razlika:
$$\Delta h = h_i + S \cdot \cos z + C \cdot R \cdot \left(\frac{S \cdot \sin z}{1000} \right)^2 - h_r$$

- h_i - visina instrumenta,
- S - kosa duljina između točaka,
- z - zenitna udaljenost,
- $h_{CR} = CR \left(\frac{D}{1000} \right)^2$ - korekcija za Zemljinu zakrivljenost i refrakciju ($CR = 0,0675$, D - horizontalna duljina),
- h_r - očitavanje na letvi.

126

Standardno odstupanje visinske razlike određene trigometrijskim nivelmanom:

$$\sigma_{\Delta h} = \left\{ \sigma_{h_i}^2 + \sigma_{h_r}^2 + \left[\left(\cos z + \frac{CR \cdot S \cdot \sin^2 z}{500} \right) \cdot \sigma_s \right]^2 + \left[\left(\frac{CR \cdot S \cdot \sin z \cdot \cos z}{500} - S \cdot \sin z \right) \frac{\sigma_z}{\rho} \right]^2 \right\}^{1/2}$$

$$\sigma_z = \frac{\sqrt{2\sigma_r^2 + 2\sigma_p^2 + 2\sigma_B^2}}{\sqrt{N}}$$

- σ_r standardno odstupanje očitavanja kuta,
- σ_p standardno odstupanje viziranja,
- σ_B pogreška kompenzatora ili libele vert. kruga,
- N broj ponavljanja mjerenja kuta.

$$\sigma_z = \frac{\sqrt{4\sigma_{DIN}^2 + 2\sigma_B^2}}{\sqrt{N}}$$

- za digitalne teodolite i mjerne stanice.

127

Izjednačenje nivelmanske mreže

Izjednačenje nivelmanske mreže po metodi uvjetnih mjerenja

Izjednačiti nivelmansku mrežu po metodi uvjetnih mjerenja znači popraviti sve mjerene visinske razlike tako da budu zadovoljeni svi matematički uvjeti koji proističu iz njenog oblika, a da pri tom suma kvadrata odstupanja v_i bude minimalna. Svaka suvišno izmjerena visinska razlika i suvišno dana apsolutna visina repera omogućuje postavljanje jednog matematičkog uvjeta iz kojeg se formira uvjetna jednadžba.

U nivelmanskoj mreži postoje dva uvjeta:

1. zbroj visinskih razlika u zatvorenom vlaku = 0.
2. zbroj visinskih razlika u obostrano priključenom vlaku = razlici apsolutnih visina priključnih repera.

1. uvjetna jednadžba zatvorenog vlaka

2. uvjetna jednadžba nivelanskog vlaka.

128

Broj uvjetnih jednadžbi u nivelmanskoj mreži

Nezavisni matematički uvjeti - uvjet je nezavisan ako sadrži bar jednu visinsku razliku koja nije prisutna u drugim uvjetima. Ako su u mreži samo dvije poznate točke (reperi) – jedna uvjetna jednadžba vlaka. Svaki novi reper – novi uvjet. Ako ima D poznatih točaka biti će $D - 1$ uvjetnih jednadžbi vlaka. Iz svakog zatvorenog vlaka – 1 uvjetna jednadžba zatvorenog vlaka.

Ako u mreži ima O zatvorenih vlakova i D poznatih repera, tada će broj nezavisnih uvjetnih jednadžbi biti:

$$r = O + D - 1 \quad \text{broj nezavisnih uvjetnih jednadžbi}$$

ili

$$r = R - u$$

R – broj nivelmanskih vlakova
 u – broj traženih veličina (broj repera čije se apsolutne visine određuju).

129

Izjednačenje nivelmanske mreže po metodi posrednih mjerenja

Po metodi posrednih mjerenja uglavnom se izjednačuju priključene mreže sa više od 2 čvorna repera čije apsolutne visine treba odrediti.

Kod posrednog izjednačenja potrebno je uspostaviti funkcionalnu vezu između mjerenih veličina (visinske razlike u pojedinim vlakovima) i traženih veličina (visine čvornih repera).

Nakon izjednačenja dobiju se najbolje procjene visina pojedinih repera s procjenom nesigurnosti izjednačenih mjerenih veličina i nepoznanica – standardno odstupanje visina repera.

130

Proračun točnosti u nivelmanskoj mreži

Točnost nivelmana – funkcija točnosti mjerenja i duljine vlaka:

$$s = s_0 \sqrt{L_{km}}$$

Ocjena točnosti niveliranja - s_0 ; može se odrediti prije i nakon izjednačenja.

1. Na osnovu dvostrukog niveliranja duljine L_{km} – standardno odstupanje niveliranja na 1km duljine vlaka:

$$s_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{\Delta^2}{L} \right]} \quad \begin{array}{l} \Delta_i - \text{razlika rezultata niveliranja naprijed i nazad} \\ \text{jednog nivelanskog vlaka duljine } L_i, \\ n - \text{broj nivelanskih vlakova,} \end{array}$$

Ovdje su prisutna i slučajna i sustavna odstupanja.

131

U praksi su prisutna i sustavna odstupanja koja će se ustanoviti tako da se zbroje razlike dvostrukog niveliranja – odredi se $[\Delta]$. Ako su mjerenja opterećena samo slučajnim odstupanjima, onda ova suma teži nuli.

Utjecaj sustavnih odstupanja na jedinicu duljine vlaka dat će koeficijent:

$$\lambda = \frac{[\Delta]}{[L]} \quad \text{koeficijent utjecaja sustavnih odstupanja na jedinicu duljine (1 km) vlaka.}$$

Razlike dvostrukih niveliranja oslobođene sustavnog dijela odstupanja, sada će biti:

$$\Delta'_i = \Delta_i - \lambda L_i$$

Standardno odstupanje niveliranja na jedinicu duljine (1 km) vlaka, koje je pod utjecajem samo slučajnih odstupanja:

$$s_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{\Delta'^2}{L} \right]}$$

132

2. Iz odstupanja u zatvorenim nivelmanskim vlakovima – standardno odstupanje niveliranja na 1km duljine vlaka

a) standardno odstupanje niveliranja za jedno stajalište:

$$s_{0(1st)} = \sqrt{\frac{f_h^2}{n}}$$

f_h – odstupanje u zatvorenom vlaku (mm)
 n – broj stajališta u vlaku
 N – broj zatvorenih vlakova

b) Standardno odstupanje niveliranja na 1 km vlaka:

$$s_{0(1km)} = s_{0(1st)} \sqrt{\frac{n}{L}}$$

L – duljina vlakova (km)

133

3. Nakon izjednačenja mreže

a) Uvjetno izjednačenje:

$$s_{0(1km)} = \sqrt{\frac{v^T p v}{r}}$$

standardno odstupanje niveliranja na jedinicu duljine (1 km) vlaka

r – broj uvjetnih jednadžbi

$p_i = 1/L_{km}$

b) Posredno izjednačenje:

$$s_{0(1km)} = \sqrt{\frac{v^T p v}{N - u}}$$

standardno odstupanje niveliranja na jedinicu duljine (1 km) vlaka

N – broj vlakova

u – broj čvornih repa

$p = 1/n$ (n – broj stajališta u vlaku)

134

Za inženjerska projektiranja često je potrebno unaprijed proračunati sa kojom će preciznošću biti određena visina nekog repa u odnosu na neke repere poznatih visina.

Prilikom projektiranja mreže mogu biti poznati slijedeći elementi:

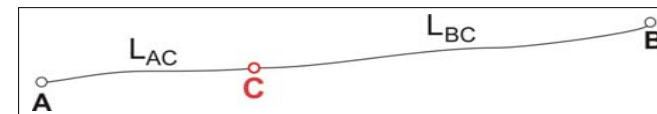
- duljine vlakova L između repa,
- preciznost niveliranja za tu vrstu mreže izražena koeficijentom s_0 - slučajno odstupanje na jedinicu duljine vlaka.

Na osnovi ovih elemenata može se odrediti:

- standardno odstupanje nivelmanskog vlaka
- standardno odstupanje visine određenog repa

135

Visina i standardno odstupanje visine repa C koji se nalazi u vlaku A - B



Visina repa C može se odrediti niveliranjem polazeći od repa A do repa C i od repa B do repa C. Konačna visina će biti aritmetička sredina iz oba rezultata.

Standardno odstupanje visine repa C

Težina visine p_C :

$$p_C = p_{AC} + p_{BC} = \frac{1}{s_{AC}^2} + \frac{1}{s_{BC}^2}$$

Standardno odstupanje vlaka AC

i BC, ako su poznata standardna odstupanja visina polaznih repa:

$$s_{AC}^2 = s_A^2 + s_0^2 \cdot L_{AC}$$

$$s_{BC}^2 = s_B^2 + s_0^2 \cdot L_{BC}$$

Težina visine repa C:

$$p_C = \frac{s_{AC}^2 + s_{BC}^2}{s_{AC}^2 \cdot s_{BC}^2}$$

Standardno odstupanje visine repa C:

$$s_C^2 = \frac{1}{p_C} = \frac{s_{AC}^2 \cdot s_{BC}^2}{s_{AC}^2 + s_{BC}^2}$$

136



PROSTORNE (3D) MREŽE

Pri klasičnim, terestričkim metodama pozicioniranja, koristi se 2D + 1D model. Prostorne mreže (3D) su one mreže kod kojih se istovremeno dobiju sve tri koordinate (X, Y, Z) u odnosu na jedinstveni koordinatni sustav. To je omogućeno korištenjem globalnih pozicijskih sustava koji za referentne (priključne) točke koriste satelite koji kruže oko Zemlje.

Globalni pozicijski sustav se sastoji od tri osnovna segmenta: **svemirskog**, **kontrolnog** i **korisničkog**.

137

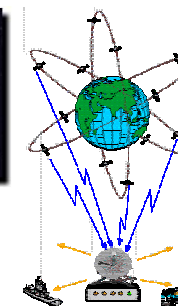
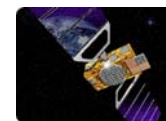


GLOBALNI NAVIGACIJSKI SATELITSKI SUSTAVI (GNSS)

NAVSTAR GPS - USA



GLONASS - SSSR



Galileo - EU

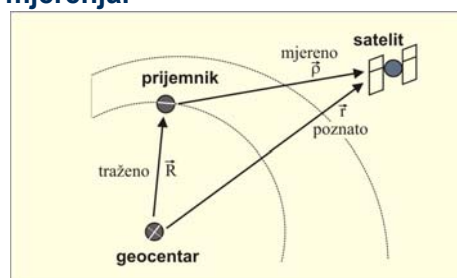


138



PRINCIP SATELITSKOG POZICIONIRANJA

Satelitsko pozicioniranje se temelji na izmjeri prostornih udaljenosti između satelita čiji je položaj poznat i prijemnika koji se postavlja na točku čije se koordinate određuju. Mjerenje udaljenosti bazira se na mjerenju vremena koje je potrebno da satelitski signal stigne do prijemnika. Razlikuju se fazna i kodna mjerenja.



Traženi vektor se računa po formuli:

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{\rho}$$

R - vektor: prijemnik – ishodište koordinatnog sustava
r - vektor: satelit – ishodište koordinatnog sustava
ρ - vektor: prijemnik - satelit.

139



Metode satelitskog pozicioniranja

Dva su osnovna principa satelitskog pozicioniranja:

- apsolutno pozicioniranje,
- relativno pozicioniranje.

Za precizne inženjerske radove koristi se samo **relativno** pozicioniranje na osnovu **faznih** mjerenja.

Relativno pozicioniranje je određivanje relativnog položaja između dva ili više prijemnika koji istovremeno primaju iste satelitske signale.

Jedan prijemnik se uzima kao referentni i postavlja se na točku poznatih koordinata (referentna ili bazna stanica). Koordinate točke na kojoj se nalazi drugi prijemnik se određuju relativno u odnosu na referentni prijemnik, odnosno određuju se koordinatne razlike (ΔX , ΔY , ΔZ) između referentne i nepoznate točke. Koordinate nove točke dobiju se tako da se izmjereni trodimenzionalni vektor dodaje poznatim trodimenzionalnim koordinatama referentne točke.

140



Metode pozicioniranja dijele se na:

- statičke metode,
- kinematičke metode.



Statičko pozicioniranje - za vrijeme opažanja prijemnici su nepomični. Metoda se koristi za visoko precizne radove.

Kinematičko pozicioniranje - prijemnik na referentnoj stanici je nepomičan, drugi se prijemnik kreće (rover).

Pri relativnom pozicioniranju, položaj točke se može odrediti ili u **realnom vremenu** ili **naknadnom obradom podataka**.

Za inženjerske radove koristi se relativno pozicioniranje na osnovu faznih mjerenja. To uključuje metode: statička, pseudo-kinematička, *stop and go* (polu kinematička), kinematička, brza statička, *on-the-fly* (OTF)/kinematička u realnom vremenu (RTK).

141

Usporedba satelitskih i terestričkih geodetskih metoda izmjere

Prednosti satelitskih metoda mjerenja:

- dogledanje između stajališta nije potrebno,
- neovisnost o vremenskim uvjetima,
- položajna nesigurnost točaka ovisi o udaljenosti između stajališta, a ne od oblika i geometrije mreže,
- točke se postavljaju tamo gdje su potrebne (npr. u dolini), a ne trebaju biti na istaknutom mjestu da zadovolje međusobnu vidljivost,
- satelitske metode su efikasnije, fleksibilnije i zahtijevaju manje vremena za izmjernu nego klasične terestričke metode,
- satelitske metode se mogu koristiti u bilo koje doba dana (i noći),
- dobiju se istovremeno sve tri koordinate.

142

Nedostaci satelitskih metoda mjerenja:

- kako nije potrebno dogledanje između stajališta, GNSS je naročito pogodan u brdovitom, nepristupačnom terenu, ali se može pojaviti problem transporta.
- za vrijeme GNSS opažanja ne smije biti zapreka na putu signala (krošnje stabala ili zgrade). Ne može se koristiti ispod zemlje, a upotreba mu je ograničena i u gusto naseljenim mjestima.
- GNSS koordinate točaka se odnose na geocentrični koordinatni sustav, pa ako se rezultati žele kombinirati sa rezultatima klasične izmjere, tada se koordinate moraju transformirati u lokalni sustav.
- elipsoidne visine dobivene satelitskim metodama moraju se reducirati na razinu plohe mora.

143

Zaključak

Položaj točke geodetske osnove može se odrediti pomoću 3D modela ili pomoću 2D + 1D model. Izbor modela i koordinatnog sustava ovisi o namjeni i prostiranju mreže, raspoloživom priboru, usvojenoj mjernoj metodi i dr. Za lokalne mreže, gdje se traži visoka preciznost, prednost ima klasični 2D + 1D model. To je najviše iz praktičnih razloga; prikladnije je iskolčavati visine točaka sa visinskih mreža, a horizontalni položaj sa horizontalnih mreža. Iako se GNSS metodama istovremeno određuju sve tri koordinate, visina određena GNSS metodama je visina u odnosu na elipsoid, dok se visina određena nivelmanom odnosi na geoid. Može se zaključiti da GNSS metode imaju široku primjenu za uspostavu horizontalnih mreža, dok su za visoko precizne inženjerske projekte pogodnije visinske mreže uspostavljene klasičnim nivelmanom.

Da se izbjegniju nedostaci bilo terestričkih bilo satelitskih metoda izmjere, uputno je tamo gdje je to moguće kombinirati obje metode. Međutim, kod nekih inženjerskih projekata određeni dio radova i nije moguće izvršiti satelitskom metodom. Npr. pri izgradnji tunela, za određivanje nadzemne geodetske osnove pogodno je koristiti satelitsku metodu, dok se podzemna geodetska osnova određuje klasičnom poligonometrijom. Visine, za obje osnove, uputno je odrediti preciznim nivelmanom.

144



TEHNIČKI IZVJEŠTAJ O PROJEKTU

Nakon izvršenog zadatka, potrebno je napraviti tehnički izvještaj, koji se sastoji od nekoliko dijelova:

1. Općeniti opis projekta

Ovaj dio sadrži općeniti prikaz projekta koji uključuje: namjenu objekta, lokaciju, investitora i izvođače radova.

2. Osnovne informacije

Osnovne informacije uključuju: razlog za izgradnju objekta (detalniji opis) i pobliži opis lokacije uključujući i geodetsku podlogu (kartu), zatim zahtjevi točnosti i ostali zahtjevi investitora (sadržaj i oblik elaborata).

3. Planiranje projekta

Ovaj dio uključuje rezultate rekognosciranja i sve ostale pripreme radnje.

145

4. Prikupljanje podataka

Pregled cjelokupne izmjere: korištena mjerna oprema (proizvođač i model), metoda izmjere, poznate točke za priključak, članove terenskih ekipa, kontrola podataka na terenu.

5. Obrada podataka

Metode obrade podataka, korišteni računalni program, rezultati izjednačenja i ocjena kvalitete rezultata.

6. Sažetak projekta i zaključci

Ovaj dio uključuje pisani izvještaj cjelokupnih rezultata obrade podataka, popis svih dijelova elaborata, postignutu točnost podataka, problemi nastali za vrijeme prikupljanja i obrade podataka, preporuke za buduće slične projekte ili projekte na tom području.

146

Literatura

Novaković, G.: *Predavanja* - interna skripta
Janković, M.: *Inženjerska geodezija I*. Tehnička knjiga, Zagreb, 1982.

Uren, J., Price, W. F.: *Surveying for Engineers*. MacMillan Press Ltd, London, 1992.

Möser, M.: *Handbuch Ingenieurgeodäsie; Grundlagen*. Herbert Wichmann Verlag, Hüthig GmbH, Heidelberg, 2000.

147